

Théorème de Hodge

Joseph Grifone

*Professeur à l'Université Paul Sabatier
Institut de mathématiques de Toulouse*

Maxime Najac

Ingénieur consultant du secteur privé

10 février 2026

Résumé

Ce document présente une démonstration du théorème de Hodge sur une variété riemannienne compacte orientable, en utilisant l'approche de l'analyse fonctionnelle et des opérateurs elliptiques.

Mots-clés : Théorème de Hodge ; Variété riemannienne ; Laplacien ; Formes harmoniques ; Cohomologie de de Rham ; Analyse fonctionnelle ; Opérateurs elliptiques.

Classification MSC (2020) : 58A14, 58J05, 53C20.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Transposition et Structure Euclidienne sur $\Lambda^p E^*$	2
3	Codifférentiation et Laplacien	7
3.1	Expression de la codifférentielle à l'aide de la dérivée covariante	9
3.2	Expression en coordonnées locales	10
4	Le Laplacien de Hodge-de Rham	11
5	Produit scalaire global et Adjonction	11
6	Formes harmoniques	12
7	Le Théorème de Hodge : Énoncé et Applications	13
8	Les opérateurs différentiels et leurs symboles	17
8.1	Notations multi-indicielles sur $\mathbb{R}^n$	17

8.2	Définition sur les variétés	18
8.3	Le Symbole Principal	19
8.4	Expression en coordonnées locales	20
8.5	Calcul du symbole du Laplacien	21
8.6	Opérateurs Elliptiques et Théorème Fondamental	22
9	Rappels de Topologie et Analyse Fonctionnelle	23
9.1	Semi-normes et Topologies localement convexes	23
9.2	Topologie faible	24
9.3	Espaces de Fréchet	24
9.4	Espaces de Lebesgue L^p	25
9.5	Espace des Distributions	26
9.5.1	Espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$	26
9.5.2	Distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$	27
9.5.3	Opérations sur les distributions	27
9.6	Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$	28
9.7	Vers les distributions : L'espace de Schwartz $\mathcal{S}$	28
9.8	Propriétés de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}$	29
10	Distributions tempérées et leurs transformées de Fourier	30
10.1	Extension de la Transformation de Fourier	30
10.2	Le Théorème de Plancherel	31
11	Espaces de Sobolev	32
11.1	Espaces $H^m(\Omega)$ avec $m \in \mathbb{N}$	32
11.2	Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ d'ordre quelconque	33
11.2.1	Caractérisation fréquentielle	33
11.2.2	Propriétés et Inclusions	34
11.3	Le Lemme de Sobolev	35
12	Compacité et Continuité dans les espaces de Sobolev	35
12.1	Le Lemme de Rellich	35
12.2	Multiplication par une fonction test (Estimations modérées)	37
13	Espaces de sections et distributions sur une variété paracompacte	38
13.1	Construction par localisation	38
13.2	Définition des espaces topologiques	38
13.3	Le cas Compact et Riemannien	39
13.3.1	Théorèmes d'injection et de régularité	39

13.4 Opérateurs Différentiels et Adjointes	40
14 Inégalités Fondamentales pour les Opérateurs Elliptiques	40
14.1 Estimations Locales	40
14.2 Inégalité de Friedrichs Globale	41
15 Théorème de Régularité Elliptique	42
15.1 Caractérisation des espaces de Sobolev par différences finies	42
15.2 Régularité locale	43
15.3 Théorème de Régularité Global	43
16 Théorème de Finitude	44
17 Généralisation du Théorème de Hodge	46
18 Ouverture : L'IA Géométrique et le Théorème de Hodge	47
18.1 Formalisme Discret : Le Complexe Simplicial Pondéré	47
18.2 HodgeRank : Analyse spectrale des flux	48
18.3 Régularisation de Sobolev et Hypothèse de la Variété	48
18.4 Invariants Topologiques et Pooling	48

1 Introduction

Dans tout ce document M est une variété riemannienne compacte, orientable, de dimension n .

On se propose de démontrer le *théorème de Hodge*, résultat central de la géométrie différentielle reliant l'analyse (opérateurs différentiels) à la topologie (forme globale de l'espace). D'après ce théorème, l'équation linéaire :

$$\Delta\omega = \alpha \quad (\text{où } \Delta = d\delta + \delta d \text{ est le laplacien de Hodge-de Rham})$$

admet une solution ω dans l'espace des p -formes $\Lambda^p M$ si et seulement si le second membre α satisfait une condition de compatibilité globale : il doit être orthogonal (pour le produit scalaire L^2 défini par la métrique) à l'espace

$$\mathcal{H}_p = \{\omega \in \Lambda^p M \mid \Delta\omega = 0\}$$

dit espace des *formes harmoniques*.

Motivation physique et interprétation. Cette équation généralise l'équation de Poisson scalaire ($\Delta V = \rho$) bien connue en électrostatique ou en gravitation newtonienne.

- En *physique théorique* (électromagnétisme de Maxwell, théories de jauge), les formes harmoniques correspondent aux configurations de champs "libres" (dans le vide) qui ne peuvent pas être éliminées par une transformation de jauge. Elles représentent les modes de champ physiquement distincts imposés par la topologie de l'univers.
- En *mécanique des fluides*, sur une surface courbe, une 1-forme harmonique correspond à un écoulement stationnaire, irrotationnel et incompressible (comme un fluide s'écoulant autour d'un tore sans source ni puits).

Du point de vue de l'analyse, la condition d'orthogonalité est une manifestation de l'*alternative de Fredholm* pour les opérateurs elliptiques auto-adjoints.

Du théorème de Hodge on peut déduire plusieurs résultats fondamentaux, cristallisant le lien entre la géométrie locale et la topologie globale :

- le théorème qui affirme qu'il existe une et une seule forme harmonique dans chaque classe de cohomologie de de Rham (ce qui signifie que chaque "trou" dans la variété correspond à une unique solution de l'équation de Laplace $\Delta\omega = 0$).
- la finitude des groupes de cohomologie de de Rham (les nombres de Betti sont finis pour une variété compacte).
- le théorème de dualité de Poincaré pour la cohomologie de de Rham.
- des relations profondes entre la courbure (propriété locale) et la cohomologie (propriété globale), initiées par la technique de Bochner.

Historique et méthode. La première démonstration de ce théorème fut donnée par Hodge en 1932. Elle s'inspirait de la théorie du potentiel et consistait à calculer une solution fondamentale approchée (ou *parametrix*) du laplacien.

En 1946 de Rham donna une démonstration plus géométrique et rigoureuse en utilisant la théorie des courants, bien que le principe analytique restât proche de celui de Hodge.

On donnera ici une *démonstration "fonctionnelle"* plus simple, plus robuste et plus moderne, en faisant appel à l'analyse fonctionnelle dans les espaces de Hilbert (espaces de Sobolev) et à la théorie des opérateurs différentiels elliptiques. Dans cette optique, le théorème de Hodge apparaîtra comme un cas particulier brillant d'un théorème de régularité et de finitude valable pour toute une classe d'opérateurs elliptiques.

Perspectives modernes et applications interdisciplinaires. Au-delà de son importance fondamentale en mathématiques pures, la décomposition de Hodge connaît un regain d'intérêt spectaculaire dans les sciences appliquées contemporaines, soulevant de nouvelles questions de recherche :

- **Analyse Topologique des Données (TDA) et Apprentissage Automatique :** Dans l'analyse de données massives (Big Data), on modélise souvent les données comme un nuage de points échantillonnant une sous-variété de dimension inconnue. Le théorème de Hodge fournit le cadre théorique pour extraire des caractéristiques topologiques robustes (les "trous" dans les données) via la cohomologie persistante. Une question ouverte majeure concerne la *stabilité* et le *calcul rapide* des laplaciens de Hodge sur des nuages de points bruités en grande dimension pour la classification non supervisée.
- **Calcul Extérieur Discret (DEC) et Infographie :** Pour les ingénieurs en simulation numérique (effets spéciaux, aérodynamique, imagerie médicale), le défi est de discretiser les équations de la physique sur des maillages (triangulations) tout en préservant les lois de conservation. Le théorème de Hodge discret permet de simuler des fluides incompressibles sur des surfaces courbes quelconques. La recherche actuelle se concentre sur la conception d'opérateurs discrets qui satisfont exactement les théorèmes de dualité de Poincaré et de Hodge, cruciaux pour la stabilité numérique à long terme.
- **Théorie de Hodge sur les Graphes et Réseaux Complexes :** Récemment, une théorie de Hodge combinatoire a émergé pour analyser les flux d'information dans les réseaux (réseaux sociaux, neurosciences, trafic internet). Elle permet de décomposer un flux (par exemple, des votes ou des transactions) en une composante "gradient" (hiérarchie globale, classement cohérent) et une composante "rotationnelle" (boucles, incohérences cycliques). L'application de ces concepts pour détecter des anomalies ou des structures cachées dans les réseaux dynamiques est un champ de recherche très actif.

Ces applications montrent que l'étude de l'équation $\Delta\omega = \alpha$ reste un pont vital entre la compréhension théorique de l'espace et la modélisation des systèmes complexes.

2 Transposition et Structure Euclidienne sur $\Lambda^p E^*$

1. **Dualité et produit scalaire.** Soit E un espace vectoriel réel euclidien de dimension n . Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induit un isomorphisme canonique (parfois noté bémol $\flat$) $\gamma : E \xrightarrow{\sim} E^*$ défini par :

$$\gamma(x)(y) = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in E$$

Cet isomorphisme permet de transporter la structure euclidienne de E sur son dual E^* . On définit le produit scalaire sur E^* par :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{E^*} = \langle \gamma^{-1}(\alpha), \gamma^{-1}(\beta) \rangle_E$$

Ainsi, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E , la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base orthonormée de E^* .

2. **Extension aux algèbres extérieures.** L'isomorphisme γ se prolonge de manière naturelle en une isométrie sur les puissances extérieures :

$$\Lambda^p E \xrightarrow{\sim} \Lambda^p E^*$$

Ceci permet de munir $\Lambda^p E^*$ (et par extension $\Lambda^p E$) d'une structure euclidienne. Concrètement, si $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ est une base orthonormée de E^* , alors la famille des p -formes :

$$\{\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

constitue une base orthonormée de $\Lambda^p E^*$.

De manière intrinsèque, le produit scalaire de deux p -formes décomposables est donné par le déterminant de Gram :

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_p \rangle = \det (\langle \alpha_i, \beta_j \rangle_{E^*})$$

3. Élément volume. Rappelons d'abord une propriété fondamentale du déterminant liée au produit extérieur. Pour $\omega_1, \dots, \omega_n \in E^*$ et $x_1, \dots, x_n \in E$:

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(x_1, \dots, x_n) = \det (\omega_i(x_j))$$

De plus, pour tout endomorphisme $f \in \text{End}(E^*)$, on a la relation de transport :

$$f(\omega_1) \wedge \cdots \wedge f(\omega_n) = (\det f) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$$

Supposons maintenant E orienté. L'espace dual E^* hérite naturellement de cette orientation. Soit $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ une base orthonormée directe de E^* . L'élément :

$$\eta = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n$$

est indépendant du choix de la base orthonormée directe.

Démonstration. Si $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ est une autre base orthonormée directe, la matrice de passage est une rotation (élément de $SO(n)$), donc de déterminant 1. Ainsi :

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n = (\det f) \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n = 1 \cdot \eta = \eta$$

□

Cet élément unique η est appelé élément volume (ou forme volume) de E^* . C'est l'unique n -forme de norme 1 compatible avec l'orientation.

Proposition 2.1. Lien entre volume algébrique et géométrique. Pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_n \in E$, on a la relation :

$$\eta(x_1, \dots, x_n) \eta = \gamma x_1 \wedge \cdots \wedge \gamma x_n$$

Démonstration. Par multilinéarité, il suffit de vérifier cette égalité sur une base. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée directe de E et $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ la base duale associée (où $\theta_i = \gamma e_i$).

Par définition de l'élément volume, on a :

$$\eta = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n = \gamma e_1 \wedge \cdots \wedge \gamma e_n$$

D'une part, l'évaluation de η sur la base donne :

$$\eta(e_1, \dots, e_n) = \det \|\langle e_i, e_j \rangle\| = \det(I_n) = 1$$

D'autre part, évaluons le terme de droite sur cette même base :

$$\begin{aligned} (\gamma x_1 \wedge \cdots \wedge \gamma x_n)(e_1, \dots, e_n) &= \det \|\langle \gamma x_i, e_j \rangle\| \\ &= \det \|\langle x_i, e_j \rangle\| = \det \|\langle e_j, x_i \rangle\| \end{aligned}$$

Or, $\eta(x_1, \dots, x_n)$ est précisément ce déterminant. On a donc bien l'égalité des scalaires :

$$\eta(x_1, \dots, x_n) \cdot \underbrace{\eta(e_1, \dots, e_n)}_1 = (\gamma x_1 \wedge \dots \wedge \gamma x_n)(e_1, \dots, e_n) \quad \square$$

4. L'opérateur étoile de Hodge.

L'élément de volume et le produit scalaire permettent de définir un isomorphisme canonique entre les p -formes et les $(n-p)$ -formes, appelé **opérateur de Hodge** :

$$* : \Lambda^p E^* \longrightarrow \Lambda^{n-p} E^*$$

Il est défini implicitement par la relation suivante, valable pour tous $x_1, \dots, x_{n-p} \in E$:

$$(*\alpha)(x_1, \dots, x_{n-p}) \eta = \alpha \wedge \gamma x_1 \wedge \dots \wedge \gamma x_{n-p}$$

Propriétés fondamentales

1) **Cas des fonctions (0-formes)** : Si f est une fonction (scalaire), alors :

$$*f = f\eta$$

2) **Action sur une base orthonormée** : Soit $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ une base orthonormée directe de E^* . Pour toute permutation $\sigma = (i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{n-p})$ de $(1 \dots n)$, on a :

$$*(\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_p}) = \varepsilon(\sigma) \theta_{j_1} \wedge \dots \wedge \theta_{j_{n-p}}$$

(où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation).

Démonstration. 1) Appliquons la définition avec $\alpha = f$ (une constante) :

$$(*f)(x_1 \dots x_n) \eta = f \wedge \gamma x_1 \wedge \dots \wedge \gamma x_n = f(\gamma x_1 \wedge \dots \wedge \gamma x_n)$$

D'après la proposition précédente, $\gamma x_1 \wedge \dots \wedge \gamma x_n = \eta(x_1 \dots x_n) \eta$. Ainsi :

$$(*f)(x_1 \dots x_n) \eta = f \eta(x_1 \dots x_n) \eta$$

En identifiant les coefficients, on obtient $*f = f\eta$.

2) Calculons l'image de la base :

$$\begin{aligned} \text{On sait que } \theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_p} \wedge \theta_{j_1} \wedge \dots \wedge \theta_{j_{n-p}} &= \varepsilon(\sigma) \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n \\ &= \varepsilon(\sigma) \eta \end{aligned}$$

Or, par définition du Hodge :

$$*(\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_p})(e_{j_1} \dots e_{j_{n-p}}) \eta = \theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_p} \wedge \gamma e_{j_1} \wedge \dots \wedge \gamma e_{j_{n-p}}$$

Le terme de droite vaut exactement $\varepsilon(\sigma) \eta$. On en déduit que la valeur de la forme $*(\dots)$ sur la base (e_{j_k}) est $\varepsilon(\sigma)$, ce qui correspond bien à la forme $\varepsilon(\sigma) \theta_{j_1} \wedge \dots \wedge \theta_{j_{n-p}}$. □

Propriété 3 (Lien avec le produit intérieur)

$$*(\gamma x) = i_x \eta \quad \forall x \in E$$

Démonstration. Par linéarité, il suffit de vérifier cela pour les vecteurs de base e_k .

$$*\theta_k = (-1)^{k-1} \theta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\theta_k} \wedge \cdots \wedge \theta_n$$

(La signature de la permutation amenant k en première position est $(-1)^{k-1}$). Or, le produit intérieur donne le même résultat :

$$i_{e_k}(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \theta_j(e_k) (\theta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\theta_j} \wedge \cdots \wedge \theta_n)$$

Seul le terme $j = k$ survit, d'où $*(\gamma e_k) = i_{e_k} \eta$. □

Propriété 4 (Involution) L'opérateur $*$ est presque involutif (au signe près) :

$$**\alpha = (-1)^{p(n-p)} \alpha \quad (\forall \alpha \in \Lambda^p E^*)$$

Démonstration. Appliquons $*$ deux fois à un élément de base $\omega = \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_p}$. Soit $J = (j_1 \dots j_{n-p})$ les indices complémentaires.

$$*(*\omega) = \varepsilon(\sigma) * (\theta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{j_{n-p}})$$

La permutation pour le second $*$ est $\sigma' = (j_1 \dots j_{n-p} i_1 \dots i_p)$.

$$*(*\omega) = \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') \omega$$

Or, passer de σ à σ' revient à échanger un bloc de taille p avec un bloc de taille $n - p$, ce qui implique $p(n - p)$ transpositions. Donc $\varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') = (-1)^{p(n-p)}$. □

Propriété 5 (Interaction avec le produit extérieur)

Si $x \in E$ et $\pi \in \Lambda^p E^*$:

$$*(\gamma x \wedge \pi) = (-1)^p i_x(*\pi)$$

Démonstration. Calculons l'évaluation du terme de droite sur $(n - p - 1)$ vecteurs :

$$(i_x(*\pi))(e_1, \dots, e_{n-p-1}) \eta = (*\pi)(x, e_1, \dots, e_{n-p-1}) \eta$$

Par définition de $*$, cela vaut :

$$= \pi \wedge \gamma x \wedge \gamma e_1 \wedge \cdots \wedge \gamma e_{n-p-1}$$

En utilisant l'anticommutativité (π est de degré p) pour placer γx en tête :

$$= (-1)^p \gamma x \wedge \pi \wedge \gamma e_1 \wedge \cdots \wedge \gamma e_{n-p-1}$$

On reconnaît la définition de l'étoile appliquée à $(\gamma x \wedge \pi)$:

$$= (-1)^p [* (\gamma x \wedge \pi)](e_1, \dots, e_{n-p-1}) \eta$$

D'où l'égalité. □

Propriété 6 (Lien avec la métrique)

C'est la propriété fondamentale reliant l'algèbre et la géométrie. Si $\alpha, \beta \in \Lambda^p E^*$, alors :

$$\langle \alpha, \beta \rangle \eta = \alpha \wedge * \beta = \beta \wedge * \alpha$$

Démonstration. Par linéarité, décomposons α dans la base orthonormée : $\alpha = \sum a_I \theta_I$ (où I est un multi-indice). On a $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum a_I \langle \theta_I, \beta \rangle$. Il suffit donc de montrer la formule pour $\alpha = \theta_I = \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_p}$.

Calculons $\theta_I \wedge * \beta$. Écrivons $\beta = \sum b_J \theta_J$. Alors $* \beta = \sum b_J (* \theta_J)$. Le produit $\theta_I \wedge (* \theta_J)$ est nul sauf si les indices de $* \theta_J$ sont complémentaires à I , c'est-à-dire si $J = I$.

Plus formellement, utilisons la propriété 4 ($*^{-1} = (-1)^{p(n-p)} *$) :

$$\beta \wedge (* \alpha) = \beta \wedge (-1)^{p(n-p)} *^{-1} (* \alpha) \quad (\text{faux départ, utilisons plutôt la symétrie})$$

Reprenons la preuve du cours :

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle \eta &= \beta(\gamma^{-1} \alpha) \eta \quad (\text{par dualité}) \\ &= \sum a_I \beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \eta \end{aligned}$$

Utilisons la définition de Hodge pour β (en sens inverse) :

$$\begin{aligned} &= \sum a_I [(*^{-1} \beta) \wedge \gamma e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \gamma e_{i_p}] \\ &= (*^{-1} \beta) \wedge (\sum a_I \theta_I) = (*^{-1} \beta) \wedge \alpha \end{aligned}$$

Comme α est une p -forme et $*^{-1} \beta$ une $(n-p)$ -forme, on commute avec un signe $(-1)^{p(n-p)}$:

$$= (-1)^{p(n-p)} \alpha \wedge (*^{-1} \beta)$$

Or $*^{-1} = (-1)^{p(n-p)} *$. Donc le signe se simplifie et on obtient $\alpha \wedge * \beta$. $\square$

REMARQUE. – Approche intrinsèque (Construction universelle). On peut définir l'opérateur $*$ de manière totalement canonique, sans passer explicitement par les bases, en utilisant la dualité.

Puisque l'espace $\Lambda^n E^*$ est de dimension 1, le choix de l'élément volume η définit un isomorphisme (une forme "trace") :

$$\begin{aligned} \tau : \Lambda^n E^* &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \\ \lambda \eta &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

Le produit extérieur permet alors de définir un accouplement bilinéaire non dégénéré :

$$\begin{aligned} \Lambda^p E^* \times \Lambda^{n-p} E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \tau(\alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

Cet accouplement induit un isomorphisme naturel entre $\Lambda^p E^*$ et le dual de $\Lambda^{n-p} E^*$:

$$\Lambda^p E^* \xrightarrow{\sim} (\Lambda^{n-p} E^*)^*$$

Or, la structure euclidienne sur $\Lambda^{n-p} E^*$ fournit, via le théorème de représentation de Riesz, un isomorphisme canonique entre l'espace et son dual :

$$(\Lambda^{n-p} E^*)^* \xrightarrow[\text{Métrique}]{\sim} \Lambda^{n-p} E^*$$

L'opérateur de Hodge $*$: $\Lambda^p E^* \rightarrow \Lambda^{n-p} E^*$ est exactement la composée de ces deux isomorphismes.

3 Codifférentiation et Laplacien

1. Parallélisme de la forme volume.

Soit M une variété riemannienne orientée de classe $\mathcal{C}^\infty$. En chaque point x , l'espace cotangent T_x^*M est un espace euclidien orienté. Puisque la métrique varie de manière $\mathcal{C}^\infty$, ces structures point par point se recollent pour définir un champ de formes volume global :

$$\eta \in \Omega^n(M) = \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^n T^*M)$$

Un résultat fondamental relie cet objet à la géométrie riemannienne :

Proposition 3.1. *Si ∇ désigne la connexion de Levi-Civita associée à la métrique, alors la forme volume est parallèle :*

$$\nabla_X \eta = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

Démonstration. Rappelons d'abord la formule de dérivation d'un produit tensoriel contracté. Pour des champs de vecteurs $Y_1, \dots, Y_n$, on a :

$$X \cdot (\eta(Y_1, \dots, Y_n)) = (\nabla_X \eta)(Y_1, \dots, Y_n) + \sum_{i=1}^n \eta(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_n) \quad (*)$$

D'autre part, localement, $\eta(Y_1, \dots, Y_n)$ s'exprime via le déterminant de la métrique ou, plus intrinsèquement :

$$\eta(Y_1, \dots, Y_n) \eta = \gamma Y_1 \wedge \dots \wedge \gamma Y_n$$

Appliquons ∇_X à cette expression. La connexion de Levi-Civita commute avec l'isomorphisme musical γ (car $\nabla g = 0$). Ainsi :

$$\begin{aligned} \nabla_X(\gamma Y_1 \wedge \dots \wedge \gamma Y_n) &= \sum_{i=1}^n \gamma Y_1 \wedge \dots \wedge \nabla_X(\gamma Y_i) \wedge \dots \wedge \gamma Y_n \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma Y_1 \wedge \dots \wedge \gamma(\nabla_X Y_i) \wedge \dots \wedge \gamma Y_n \end{aligned}$$

En utilisant la relation entre produit extérieur et forme volume établie précédemment, chaque terme de la somme vaut :

$$\eta(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_n) \eta$$

En réinjectant cela dans l'expression de la dérivée du produit, on obtient :

$$X \cdot (\eta(Y_1 \dots Y_n)) \eta = \left(\sum_{i=1}^n \eta(Y_1 \dots \nabla_X Y_i \dots) \right) \eta$$

En comparant avec l'identité (*) multipliée par η , il ne reste que :

$$(\nabla_X \eta)(Y_1, \dots, Y_n) \eta = 0$$

Ceci étant vrai pour tout n -uplet de vecteurs, et η étant une base locale de $\Lambda^n M$, on en déduit que $\nabla_X \eta = 0$. $\square$

2. L'opérateur de codifférentiation δ .

La construction du paragraphe précédent définit un isomorphisme $*$: $\Lambda^p M \rightarrow \Lambda^{n-p} M$. Nous pouvons maintenant définir l'opérateur différentiel δ , qui jouera le rôle d'adjoint formel de la différentielle extérieure d .

Définition 3.2. On appelle codifférentiation l'application linéaire :

$$\delta : \Lambda^p M \longrightarrow \Lambda^{p-1} M$$

définie par la formule :

$$\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d *$$

Propriétés fondamentales :

1. Annulation sur les fonctions :

$$\delta f = 0 \quad (\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M))$$

2. Règle de type Leibniz : Pour toute fonction f et toute p -forme ω :

$$\delta(f\omega) = -i_{\gamma^{-1}df}\omega + f\delta\omega$$

3. Lien avec la divergence (et la dérivée de Lie) : Pour tout champ de vecteurs X :

$$\delta(\gamma X)\eta = -\mathcal{L}_X\eta \quad (\text{soit } \delta(\gamma X) = -\text{div}(X))$$

Démonstration. 1. Si f est une 0-forme, $*f$ est une n -forme. Donc $d(*f)$ est une $(n+1)$ -forme, qui est nécessairement nulle sur une variété de dimension n . Ainsi $\delta f = 0$.

2. Calculons $\delta(f\omega)$ en utilisant la définition :

$$\delta(f\omega) = C_{n,p} * d(f * \omega) \quad \text{où } C_{n,p} = (-1)^{n(p+1)+1}$$

Par la règle de dérivation du produit extérieur :

$$d(f * \omega) = df \wedge (*\omega) + f d(*\omega)$$

En appliquant $*$ (qui est linéaire) :

$$\delta(f\omega) = C_{n,p} [* (df \wedge *\omega) + f * d * \omega]$$

Le second terme est exactement $f\delta\omega$. Pour le premier terme, utilisons la propriété 5 de la section précédente ($*(\gamma x \wedge \pi) = (-1)^{\deg \pi} i_x(*\pi)$) avec $\gamma x = df$ et $\pi = *\omega$ (de degré $n-p$) :

$$\begin{aligned} *(df \wedge *\omega) &= (-1)^{n-p} i_{\gamma^{-1}df}(* * \omega) \\ &= (-1)^{n-p} i_{\gamma^{-1}df} \left((-1)^{p(n-p)} \omega \right) \\ &= (-1)^{n-p+pn-p^2} i_{\gamma^{-1}df} \omega \end{aligned}$$

En combinant avec le coefficient global $C_{n,p}$, le signe total est $(-1)^{np+n+1+n-p+pn-p^2}$. Après simplification (modulo 2), on trouve -1 . D'où la formule.

3. On sait que la dérivée de Lie de la forme volume est donnée par la formule de Cartan : $\mathcal{L}_X \eta = (di_X + i_X d)\eta = di_X \eta$ (car $d\eta = 0$). Or, nous avons vu que $i_X \eta = *(\gamma X)$. Donc :

$$\mathcal{L}_X \eta = d(*\gamma X)$$

Appliquons $*$ à cette égalité (rappelons que $*$ sur les n -formes vaut $(-1)^{n(0)} = 1$ si on considère le résultat comme scalaire, ou plutôt $*f = f\eta$) :

$$*\mathcal{L}_X \eta = *d* (\gamma X)$$

Or, pour une 1-forme ($p = 1$), la définition de δ donne $\delta = (-1)^{2n+1} * d* = - * d*$. D'où :

$$*\mathcal{L}_X \eta = -\delta(\gamma X)$$

Ce qui équivaut à $\delta(\gamma X)\eta = -\mathcal{L}_X \eta$.

□

Corollaire 3.3 (Formule de Green – Théorème de la divergence). Soit M une variété compacte et orientée (sans bord). Ce résultat fondamental exprime que l'intégrale de la codifférentielle d'une 1-forme est toujours nulle.

Pour toute 1-forme $\omega \in \Lambda^1 M$:

$$\int_M (\delta\omega) \eta = 0$$

Démonstration. Associons à la 1-forme ω son champ de vecteurs dual $X = \gamma^{-1}\omega$. D'après la propriété précédente (point 3), la codifférentiation correspond à l'opposé de la divergence (au sens de la dérivée de Lie) :

$$(\delta\omega)\eta = -\mathcal{L}_X \eta$$

Utilisons maintenant la **formule magique de Cartan** : $\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d$. Puisque η est une n -forme sur une variété de dimension n , sa différentielle est nulle ($d\eta = 0$). Ainsi :

$$\mathcal{L}_X \eta = d(i_X \eta) + i_X(d\eta) = d(i_X \eta)$$

L'intégrale devient alors :

$$\int_M (\delta\omega)\eta = - \int_M d(i_X \eta)$$

La variété M étant compacte (et implicitement sans bord), le **théorème de Stokes** assure que l'intégrale de toute forme exacte est nulle :

$$\int_M d(i_X \eta) = \int_{\partial M} i_X \eta = 0$$

□

3.1 Expression de la codifférentielle à l'aide de la dérivée covariante

Il est souvent plus aisé de calculer δ en utilisant la connexion de Levi-Civita ∇ , plutôt que de passer par l'opérateur étoile de Hodge. Pour une 1-forme associée à un champ de vecteurs X (c'est-à-dire $\omega = \gamma X$), le résultat est immédiat : δ correspond (au signe près) à la divergence riemannienne.

Proposition 3.4. Si ∇ est la connexion de Levi-Civita :

$$\delta(\gamma X) = -\text{Tr}(\nabla X) = -\text{div}(X) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

Démonstration. Nous avons vu précédemment que $\nabla_X \eta = 0$. Utilisons la relation entre dérivée de Lie et connexion :

$$\begin{aligned} -(\mathcal{L}_X \eta)(Y_1, \dots, Y_n) &= (\nabla_X \eta - \mathcal{L}_X \eta)(Y_1, \dots, Y_n) \\ &= -\eta([X, Y_1], Y_2, \dots, Y_n) - \dots - \eta(Y_1, \dots, Y_{n-1}, [X, Y_n]) \end{aligned}$$

Or, la connexion de Levi-Civita est sans torsion, donc $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. Les termes en $\nabla_X Y_i$ s'annulent (propriété de dérivation tensorielle de η et $\nabla \eta = 0$), il ne reste que les termes en $-\nabla_{Y_i} X$:

$$\begin{aligned} -(\mathcal{L}_X \eta)(Y_1, \dots, Y_n) &= -\eta(\nabla_{Y_1} X, Y_2, \dots, Y_n) - \dots - \eta(Y_1, \dots, \nabla_{Y_n} X) \\ &= -(\text{Trace } \nabla X) \eta(Y_1, \dots, Y_n) \end{aligned}$$

(La dernière égalité provient de la définition de la trace d'un endomorphisme $A : v \mapsto \nabla_v X$ via la forme volume). On obtient donc :

$$\mathcal{L}_X \eta = (\text{Tr } \nabla X) \eta$$

Enfin, comme nous avons établi que $\delta(\gamma X) \eta = -\mathcal{L}_X \eta$, on conclut :

$$\delta(\gamma X) = -\text{Tr } \nabla X \quad \square$$

3.2 Expression en coordonnées locales

Ces formules intrinsèques se traduisent aisément en coordonnées locales. Soit (x^i) un système de coordonnées et $\nabla_i = \nabla_{\partial/\partial x^i}$.

Pour un champ de vecteurs $X = X^i \partial_i$, la trace de la dérivée covariante est la contraction des indices :

$$\delta(\gamma X) = -\sum_i \nabla_i X^i$$

Pour une 1-forme $\omega = \omega_i dx^i$, en utilisant la montée d'indices par la métrique ($\nabla^i = g^{ij} \nabla_j$), on a :

$$\delta \omega = -\sum_i \nabla^i \omega_i$$

Plus généralement (**exercice**), pour une p -forme quelconque $\omega \in \Lambda^p M$, la codifférentielle est la contraction de la dérivée covariante :

$$(\delta \omega)_{i_1 \dots i_{p-1}} = -\nabla^k \omega_{k i_1 \dots i_{p-1}}$$

(avec la convention de sommation d'Einstein sur l'indice répété k).

Cas particulier : $M = \mathbb{R}^n$ (Métrique standard). Dans ce cas, la dérivée covariante ∇ est simplement la dérivée partielle usuelle.

$$\delta(\gamma X) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^i} = -\operatorname{div}(X)$$

$$\text{et pour une fonction } f, \quad \delta(df) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}$$

Notez bien le signe : $\delta df = -\Delta_{\text{usuel}} f$ (où Δ_{usuel} est le laplacien des analystes, somme des dérivées secondes).

4 Le Laplacien de Hodge-de Rham

Nous pouvons maintenant définir l'opérateur central de la théorie de Hodge, qui généralise le laplacien des fonctions aux formes différentielles de degré arbitraire.

Définition 4.1. On appelle Laplacien (ou opérateur de Laplace-Beltrami) l'application linéaire :

$$\Delta : \Lambda^p M \longrightarrow \Lambda^p M$$

définie par :

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

Remarque importante sur le signe. Sur $\mathbb{R}^n$, pour une fonction f (0-forme), on a $\delta f = 0$, donc :

$$\Delta f = \delta df = - \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = -\Delta_{\text{usuel}} f$$

Le Laplacien de Hodge est un opérateur **positif** (analogue à $-\frac{d^2}{dx^2}$), contrairement au laplacien usuel qui est négatif.

Propriété de commutation (Exercice) : L'opérateur étoile commute avec le Laplacien :

$$\Delta * = * \Delta$$

5 Produit scalaire global et Adjonction

Hypothèse : Soit M une variété compacte orientée (sans bord).

La structure euclidienne ponctuelle sur les fibres nous permet de définir un produit scalaire global sur l'espace des p -formes (produit scalaire L^2). Pour $\alpha, \beta \in \Lambda^p M$, on pose :

$$(\alpha, \beta) = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle_x \eta = \int_M \alpha \wedge * \beta$$

Cette forme bilinéaire possède les propriétés suivantes :

- **Symétrie** : $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$.
- **Positivité** : $(\alpha, \alpha) = \int_M \|\alpha\|^2 \eta \geq 0$, et $(\alpha, \alpha) = 0 \iff \alpha = 0$ (car α est continue).

C'est donc un produit scalaire défini positif.

Le résultat fondamental qui justifie l'introduction de δ est le suivant :

Proposition 5.1. *Pour le produit scalaire global L^2 , l'opérateur δ est l'adjoint de l'opérateur d , et le Laplacien Δ est autoadjoint.*

$$\begin{aligned} (d\alpha, \beta) &= (\alpha, \delta\beta) \quad (\forall \alpha \in \Lambda^{p-1}M, \beta \in \Lambda^pM) \\ (\Delta\alpha, \beta) &= (\alpha, \Delta\beta) \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \Lambda^{p-1}M$ et $\beta \in \Lambda^pM$. Considérons la $(n-1)$ -forme $\omega = \alpha \wedge * \beta$. Calculons sa différentielle extérieure :

$$d(\alpha \wedge * \beta) = d\alpha \wedge * \beta + (-1)^{p-1} \alpha \wedge d(* \beta)$$

Nous voulons faire apparaître $\delta\beta$. Rappelons que $\delta\beta = (-1)^{n(p+1)+1} * d * \beta$. Un calcul algébrique sur les signes (laissé en soin au lecteur, mais découlant de la définition de δ) montre que le second terme s'écrit exactement :

$$(-1)^{p-1} \alpha \wedge d(* \beta) = -\alpha \wedge *(\delta\beta)$$

Ainsi :

$$d(\alpha \wedge * \beta) = d\alpha \wedge * \beta - \alpha \wedge * \delta\beta$$

Intégrons cette égalité sur la variété M . Comme M est compacte sans bord, le théorème de Stokes implique que l'intégrale de la forme exacte $d(\dots)$ est nulle :

$$0 = \int_M d\alpha \wedge * \beta - \int_M \alpha \wedge * \delta\beta$$

Ce qui équivaut, par définition du produit scalaire, à :

$$(d\alpha, \beta) - (\alpha, \delta\beta) = 0$$

L'autoadjonction de Δ en découle immédiatement par linéarité :

$$(\Delta\alpha, \beta) = (d\delta\alpha, \beta) + (\delta d\alpha, \beta) = (\delta\alpha, \delta\beta) + (d\alpha, d\beta)$$

Cette expression est symétrique en α et β , donc $(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta)$. □

6 Formes harmoniques

La notion centrale de ce chapitre est celle de forme harmonique. Analytiquement, ce sont les solutions de l'équation de Laplace. Géométriquement, ce sont les formes qui sont "le plus plates possible" compte tenu de la courbure de la variété.

Définition 6.1. Une forme différentielle $\alpha \in \Lambda^p M$ est dite harmonique si elle est dans le noyau du Laplacien :

$$\Delta\alpha = 0$$

On note $\mathcal{H}^p(M)$ l'espace vectoriel des p -formes harmoniques.

Le résultat suivant est crucial : sur une variété compacte, être harmonique équivaut à être à la fois fermé et cofermé.

Proposition 6.2. *Sur une variété riemannienne compacte orientée (sans bord) :*

$$\Delta\alpha = 0 \iff \begin{cases} d\alpha = 0 & (\alpha \text{ est fermée}) \\ \delta\alpha = 0 & (\alpha \text{ est cofermée}) \end{cases}$$

Démonstration. **Sens direct ($\Rightarrow$).** Supposons $\Delta\alpha = 0$. Calculons le produit scalaire global $(\Delta\alpha, \alpha)$:

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta\alpha, \alpha) = ((d\delta + \delta d)\alpha, \alpha) \\ &= (d\delta\alpha, \alpha) + (\delta d\alpha, \alpha) \end{aligned}$$

En utilisant l'adjonction de d et δ :

$$\begin{aligned} &= (\delta\alpha, \delta\alpha) + (d\alpha, d\alpha) \\ &= \|\delta\alpha\|_{L^2}^2 + \|d\alpha\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

La somme de deux nombres positifs (les normes au carré) est nulle si et seulement si chaque terme est nul. Donc $\|\delta\alpha\| = 0$ et $\|d\alpha\| = 0$, ce qui implique $\delta\alpha = 0$ et $d\alpha = 0$.

Sens réciproque ($\Leftarrow$). Immédiat : Si $d\alpha = 0$ et $\delta\alpha = 0$, alors $\Delta\alpha = d(\delta\alpha) + \delta(d\alpha) = d(0) + \delta(0) = 0$. $\square$

REMARQUE. – Cette proposition s'interprète physiquement : les formes harmoniques sont les minima globaux de la fonctionnelle "énergie de Dirichlet" :

$$E(\alpha) = \frac{1}{2} \int_M (|d\alpha|^2 + |\delta\alpha|^2) \eta$$

Corollaire 6.3 (Fonctions harmoniques sur un compact). Les seules fonctions harmoniques (0-formes) sur une variété compacte orientée connexe sont les **constantes**.

Démonstration. Soit $f \in C^\infty(M)$ telle que $\Delta f = 0$. D'après la proposition précédente, cela implique $df = 0$ (et $\delta f = 0$, ce qui est toujours vrai pour une fonction). Si la différentielle df est nulle partout sur une variété connexe, alors la fonction f est constante. $\square$

7 Le Théorème de Hodge : Énoncé et Applications

Le résultat central de ce chapitre établit une décomposition fondamentale de l'espace des formes différentielles sur une variété compacte, basée sur le Laplacien.

Théorème 7.1 (Théorème de Hodge). Soit M une variété riemannienne C^∞ , compacte et orientée. Considérons l'espace des p -formes harmoniques :

$$\mathcal{H}_p = \{\omega \in \Lambda^p M \mid \Delta\omega = 0\}$$

Alors :

1. L'espace $\mathcal{H}_p$ est de **dimension finie**.
2. L'espace des p -formes se décompose en somme directe orthogonale :

$$\Lambda^p M = \Delta(\Lambda^p M) \oplus \mathcal{H}_p$$

La démonstration de ce théorème, qui repose sur l'analyse fonctionnelle des opérateurs elliptiques, sera donnée dans les paragraphes suivants. Explorons d'abord ses conséquences immédiates.

① Proposition (Décomposition de Hodge)

L'espace des p -formes admet une décomposition orthogonale plus fine :

$$\Lambda^p M = d(\Lambda^{p-1} M) \oplus \delta(\Lambda^{p+1} M) \oplus \mathcal{H}_p$$

Ces trois sous-espaces sont mutuellement orthogonaux pour le produit scalaire L^2 .

Ainsi, toute p -forme ω se décompose de manière unique sous la forme :

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma \quad (\text{avec } \gamma \in \mathcal{H}_p)$$

C'est-à-dire comme somme d'une forme exacte, d'une forme coexacte et d'une forme harmonique.

Démonstration. Orthogonalité : Vérifions que les espaces sont deux à deux orthogonaux. Soient $\omega \in \mathcal{H}_p$, $\alpha \in \Lambda^{p-1} M$ et $\beta \in \Lambda^{p+1} M$.

- $(\omega, d\alpha) = (\delta\omega, \alpha) = 0$ car ω est harmonique donc cofermée ($\delta\omega = 0$).
- $(\omega, \delta\beta) = (d\omega, \beta) = 0$ car ω est harmonique donc fermée ($d\omega = 0$).
- $(d\alpha, \delta\beta) = (d^2\alpha, \beta) = 0$ car $d^2 = 0$.

Décomposition : D'après le théorème de Hodge, on a $\Lambda^p M = \mathcal{H}_p \oplus \text{Im}(\Delta)$. Or, l'image du Laplacien se décompose comme suit :

$$\Delta(\Lambda^p M) = (d\delta + \delta d)(\Lambda^p M) \subset d(\Lambda^{p-1} M) + \delta(\Lambda^{p+1} M)$$

Comme les espaces $d(\Lambda^{p-1} M)$ et $\delta(\Lambda^{p+1} M)$ sont orthogonaux, leur somme est directe. De plus, l'inclusion inverse est vraie car Δ est surjectif sur son image (orthogonale au noyau). Ainsi :

$$\Delta(\Lambda^p M) = d(\Lambda^{p-1} M) \oplus \delta(\Lambda^{p+1} M) \quad \square$$

② Corollaire (Résolubilité de l'équation de Poisson)

Une conséquence directe de la décomposition orthogonale est le critère de résolubilité suivant :

L'équation $\Delta\omega = \alpha$ admet une solution si et seulement si α est orthogonale à l'espace des formes harmoniques $\mathcal{H}_p$.

Ceci traduit le fait que l'image de Δ est exactement l'orthogonal de son noyau (propriété des opérateurs autoadjoints à image fermée).

③ Opérateur de Green

Notons $H : \Lambda^p M \rightarrow \mathcal{H}_p$ le projecteur orthogonal sur l'espace des formes harmoniques. L'opérateur Laplacien restreint à l'orthogonal des formes harmoniques,

$$\Delta|_{\mathcal{H}^\perp} : \mathcal{H}^\perp \longrightarrow \mathcal{H}^\perp,$$

est un isomorphisme (car $\mathcal{H}^\perp = (\ker \Delta)^\perp = \text{Im } \Delta$). On peut donc définir son inverse.

Définition 7.2. On appelle opérateur de Green l'application linéaire bornée :

$$G : \Lambda^p M \longrightarrow \Lambda^p M$$

définie par :

$$G = (\Delta|_{\mathcal{H}^\perp})^{-1} \circ (1 - H)$$

(où l'on considère implicitement l'injection de $\mathcal{H}^\perp$ dans $\Lambda^p M$).

Propriétés de G :

— Pour toute forme α , $G\alpha$ est l'unique solution dans $\mathcal{H}^\perp$ de l'équation :

$$\Delta\omega = \alpha - H\alpha$$

En effet, $\Delta G\alpha = \Delta(\Delta|_{\mathcal{H}^\perp})^{-1}(\alpha - H\alpha) = \alpha - H\alpha$.

— G commute avec Δ : $\Delta G = G\Delta = 1 - H$ sur $\Lambda^p M$.

— G est autoadjoint (car Δ l'est).

Proposition 7.3. Les opérateurs H et G commutent avec tout opérateur linéaire $T : \Lambda^p M \rightarrow \Lambda^p M$ qui commute avec le Laplacien Δ . En particulier, H et G commutent avec d , δ et Δ .

Démonstration. Supposons que $T\Delta = \Delta T$. Alors T préserve le noyau de Δ (si $\Delta\omega = 0$, alors $\Delta T\omega = T\Delta\omega = 0$), donc $T(\mathcal{H}_p) \subset \mathcal{H}_p$. Comme Δ est autoadjoint, T préserve aussi l'image de Δ (qui est l'orthogonal du noyau), donc $T(\mathcal{H}^\perp) \subset \mathcal{H}^\perp$.

Puisque T stabilise la décomposition $\Lambda^p M = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}^\perp$, il commute avec le projecteur H sur $\mathcal{H}_p$:

$$TH = HT$$

De même, T commute avec la restriction $\Delta|_{\mathcal{H}^\perp}$ et donc avec son inverse. Comme il commute aussi avec $1 - H$, il commute nécessairement avec G . $\square$

Grâce à l'opérateur de Green, nous pouvons établir le lien fondamental entre l'analyse (formes harmoniques) et la topologie (cohomologie).

Théorème 7.4 (Isomorphisme de Hodge-de Rham). Soit M une variété riemannienne compacte orientée. Dans chaque classe de cohomologie de de Rham, il existe une et une seule forme harmonique. Autrement dit, l'application naturelle :

$$\mathcal{H}^p(M) \xrightarrow{\cong} H_{dR}^p(M)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. **Existence :** Soit $[\omega] \in H_{dR}^p(M)$ une classe de cohomologie, représentée par une forme fermée ω ($d\omega = 0$). D'après la décomposition de Hodge, on peut écrire :

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma \quad (\gamma \in \mathcal{H}^p(M))$$

Comme $d\omega = 0$, on a $d\delta\beta = 0$. En prenant le produit scalaire avec β :

$$(d\delta\beta, \beta) = (\delta\beta, \delta\beta) = \|\delta\beta\|^2 = 0 \implies \delta\beta = 0$$

Ainsi, $\omega = d\alpha + \gamma$. La forme $\gamma = \omega - d\alpha$ est cohomologue à ω et elle est harmonique.

Unicité : Si $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{H}^p(M)$ sont dans la même classe, alors $\gamma_1 - \gamma_2 = d\eta$. Comme $\gamma_1 - \gamma_2$ est harmonique, elle est cofermée ($\delta(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$).

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|^2 = (\gamma_1 - \gamma_2, d\eta) = (\delta(\gamma_1 - \gamma_2), \eta) = 0$$

D'où $\gamma_1 = \gamma_2$. □

Conséquence immédiate : Puisque l'espace $\mathcal{H}^p(M)$ est de dimension finie (Théorème de Hodge, point 1), on obtient un résultat topologique non trivial :

Corollaire 7.5 (Finitude des nombres de Betti). Pour toute variété compacte orientable, les espaces de cohomologie de de Rham sont de dimension finie. Les nombres de Betti $\beta_p = \dim H_{dR}^p(M)$ sont bien définis et finis.

③ Dualité de Poincaré

L'accouplement naturel entre formes différentielles induit une dualité en cohomologie. Considérons la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} H_{dR}^p(M) \times H_{dR}^{n-p}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\varphi], [\psi]) &\longmapsto \int_M \varphi \wedge \psi \end{aligned}$$

Cette application est **bien définie** (indépendante des représentants). En effet, si $\varphi' = \varphi + d\xi$, alors par la formule de Stokes (et car $d\psi = 0$) :

$$\int_M (\varphi + d\xi) \wedge \psi = \int_M \varphi \wedge \psi + \int_M d(\xi \wedge \psi) = \int_M \varphi \wedge \psi$$

Proposition 7.6. Cette forme bilinéaire est non dégénérée. Elle induit donc un isomorphisme canonique :

$$H_{dR}^{n-p}(M) \cong (H_{dR}^p(M))^*$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $[\varphi] \neq 0$, il existe $[\psi]$ tel que l'intégrale soit non nulle. Choisissons une métrique riemannienne. Soit $\varphi \in \mathcal{H}^p(M)$ l'unique représentant harmonique de la classe $[\varphi]$. Puisque $[\varphi] \neq 0$, on a $\varphi \neq 0$. Considérons $\psi = *\varphi \in \Lambda^{n-p}M$. Comme Δ commute avec $*$, ψ est aussi harmonique ($\Delta\psi = \Delta*\varphi = *\Delta\varphi = 0$), donc fermée. Elle définit une classe $[\psi] \in H_{dR}^{n-p}(M)$. L'accouplement donne :

$$\int_M \varphi \wedge *\varphi = \|\varphi\|_{L^2}^2 > 0$$

Donc la forme bilinéaire est non dégénérée. □

Corollaire (Symétrie des nombres de Betti). Pour une variété compacte orientée de dimension n :

$$\beta_p = \beta_{n-p}$$

④ Technique de Bochner : Courbure et Topologie

C'est l'une des applications les plus spectaculaires : des contraintes locales sur la courbure imposent des contraintes globales sur la topologie.

Pour toute 1-forme ω , la formule de Weitzenböck relie le Laplacien de Hodge Δ au "Laplacien brut" (trace des dérivées secondes covariantes) et à la courbure de Ricci. Soit X le champ de vecteurs dual de la 1-forme harmonique ω (i.e. $\omega(Y) = \langle X, Y \rangle$).

On établit l'identité suivante (Formule de Bochner pour les 1-formes) :

$$\frac{1}{2}\Delta(\|X\|^2) = \langle \Delta\omega, \omega \rangle - \|\nabla X\|^2 - \text{Ric}(X, X)$$

En intégrant sur une variété compacte (où l'intégrale du laplacien d'une fonction est nulle par Stokes), et si ω est harmonique ($\Delta\omega = 0$), on obtient :

$$0 = \int_M (\|\nabla X\|^2 + \text{Ric}(X, X)) \eta$$

Théorème 7.7 (Théorème de Bochner). Soit M une variété riemannienne compacte orientée.

- Si la courbure de Ricci est positive ou nulle partout ($\text{Ric} \geq 0$), alors toute 1-forme harmonique est parallèle ($\nabla X = 0$).
- Si la courbure de Ricci est strictement positive en au moins un point (et ≥ 0 partout), alors il n'existe pas de 1-forme harmonique non nulle.

Conséquence topologique : Si $\text{Ric} > 0$, alors $\beta_1(M) = 0$ (le premier groupe de cohomologie est trivial). Par dualité de Poincaré, on a aussi $\beta_{n-1}(M) = 0$.

8 Les opérateurs différentiels et leurs symboles

Pour définir rigoureusement les opérateurs différentiels sur une variété, nous devons d'abord introduire le formalisme des multi-indices, qui simplifie considérablement l'écriture des dérivées partielles dans $\mathbb{R}^n$.

8.1 Notations multi-indices sur $\mathbb{R}^n$

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice. On définit :

— **Longueur et Factorielle :**

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad \text{et} \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

— **Puissance et Dérivée :** Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$$

- **Ordre partiel** : On écrit $\beta \leq \alpha$ si $\beta_i \leq \alpha_i$ pour tout i . On peut alors définir $\alpha - \beta$ et les coefficients binomiaux généralisés :

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}$$

Ces notations permettent de condenser les formules classiques d'analyse :

Proposition 8.1. 1. *Formule de Leibniz (Dérivée d'un produit)*

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f \cdot D^{\alpha-\beta} g$$

2. *Formule de Taylor (au voisinage de a)*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(a) (x - a)^\alpha + R_m(x)$$

où le reste $R_m(x)$ est négligeable devant $\|x - a\|^m$ (notation de Landau $o(\|x - a\|^m)$).

8.2 Définition sur les variétés

Soit M une variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension n . Considérons deux fibrés vectoriels F et F' sur M , de rangs respectifs r et r' . On note $\underline{F} = \Gamma(F) = \mathcal{C}^\infty(M, F)$ l'espace (ou le faisceau) des sections lisses de F .

Définition 8.2. Un opérateur différentiel est une application linéaire $L : \underline{F} \rightarrow \underline{F}'$ qui est locale et s'exprime, dans toute carte locale, comme une combinaison linéaire de dérivées partielles.

Précisément, pour tout ouvert de carte U trivialisant F et F' , l'opérateur induit (vu comme application de $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^r)$ dans $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^{r'})$) doit s'écrire :

$$L|_U = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha$$

où les coefficients $A_\alpha(x)$ sont des matrices de taille (r', r) dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de $x \in U$.

Notion d'ordre. L'ordre de L en un point x est le plus petit entier m tel que $A_\alpha(x) = 0$ pour tout $|\alpha| > m$. L'ordre global de L est le maximum de ces ordres sur M .

REMARQUE. – Caractérisation intrinsèque de l'ordre (Peetre). Il est possible de définir l'ordre sans recourir aux cartes locales, en testant l'opérateur sur des fonctions qui s'annulent.

1. **Ordre 0** : Un opérateur est d'ordre 0 si et seulement si il est **tensoriel**, c'est-à-dire $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linéaire :

$$L(fs) = fL(s) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), s \in \underline{F}$$

Dans ce cas, la valeur $(Ls)(x)$ ne dépend que de $s(x)$.

2. **Ordre m** : Plus généralement, l'ordre de L en x est le plus petit entier m tel que, pour toute section s et toute fonction f s'annulant en x ($f(x) = 0$), on ait :

$$L(f^{m+1}s)(x) = 0$$

Cela signifie que L ne "voit" que le jet d'ordre m de la section.

Exemples fondamentaux. Analysons l'ordre des opérateurs rencontrés dans ce cours.

Démonstration. 1. **Différentielle d (Ordre 1).** On a $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$. Si $f(x) = 0$, le terme $f d\omega$ s'annule, mais $df \wedge \omega$ peut être non nul. Testons avec f^2 (où $f(x) = 0$, donc $df(x) = 0$) :

$$d(f^2\omega) = 2f df \wedge \omega + f^2 d\omega$$

Si $f(x) = 0$, alors $f(x)$ et $df(x)$ s'annulent (car x est un point critique pour f^2), donc $d(f^2\omega)(x) = 0$. L'ordre est donc 1.

2. **Codifférentielle δ (Ordre 1).** De même, la formule $\delta(f\omega) = -i_{\gamma^{-1}df}\omega + f\delta\omega$ montre que si $f(x) = 0$, $\delta(f\omega)(x)$ dépend de $df(x)$. En revanche, pour f^2 , le terme en $df^2 = 2f df$ s'annule en x . L'ordre est 1.

3. **Hodge $*$ (Ordre 0).** L'opérateur étoile est linéaire sur les fibres : $*(f\omega) = f(*\omega)$. Il est d'ordre 0.

4. **Laplacien Δ (Ordre 2).** On a $\Delta = d\delta + \delta d$. C'est la composée de deux opérateurs d'ordre 1. Par la règle de composition, l'ordre est au plus $1 + 1 = 2$. Le terme dominant fait intervenir les dérivées secondes (comme vu sur $\mathbb{R}^n$ où $\Delta f = -\sum \partial_i^2 f$), donc l'ordre est exactement 2.

□

8.3 Le Symbole Principal

Pour étudier les propriétés analytiques d'un opérateur (notamment son inversibilité ou sa régularité), il est crucial de pouvoir associer à l'opérateur différentiel un objet algébrique plus simple : son **symbole**.

Définition 8.3. Soit $\dot{T}^*M = T^*M \setminus \{0_M\}$ le fibré cotangent privé de la section nulle. On note $\mathcal{L}(F, F')$ le fibré des applications linéaires de F dans F' .

On appelle symbole (principal) de l'opérateur L d'ordre p , l'application :

$$\sigma_L : \dot{T}^*M \longrightarrow \mathcal{L}(F, F')$$

définie de manière intrinsèque comme suit :

Soit $(x, \omega) \in \dot{T}^*M$ un covecteur non nul en x . Pour évaluer le symbole sur un vecteur $\xi \in F_x$, on choisit :

- Une fonction test $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $f(x) = 0$ et $df(x) = \omega$.
- Une section test $s \in \underline{F}$ telle que $s(x) = \xi$.

On pose alors :

$$\sigma_L(x, \omega)\xi = \frac{1}{p!} L(f^p s)(x)$$

REMARQUE. — Cette définition ne dépend pas des choix auxiliaires de f et s . Cela se vérifie aisément par la formule de Leibniz (les termes d'ordre inférieur s'annulent grâce à la puissance p de la fonction qui s'annule).

Exemples fondamentaux

1. **Opérateurs d'ordre 0.** Si L est d'ordre 0, c'est un morphisme de fibrés $L(x)$. On prend $p = 0$ (donc $f^0 = 1$) :

$$\sigma_L(x, \omega)\xi = L(s)(x) = L(x) \cdot s(x) = L(x)\xi$$

Le symbole est l'opérateur lui-même : $\sigma_L(x, \omega) = L_x$.

2. **Différentielle extérieure (d).** L'opérateur $d : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k+1}$ est d'ordre 1.

$$\sigma_d(x, \omega)\xi = d(fs)(x) \quad \text{avec } f(x) = 0, df_x = \omega, s(x) = \xi$$

On a $d(fs) = df \wedge s + f ds$. En évaluant en x (où $f = 0$) :

$$\sigma_d(x, \omega)\xi = \omega \wedge \xi$$

Le symbole est la multiplication extérieure par ω , notée e_ω :

$$\sigma_d(x, \omega) = e_\omega$$

3. **Codifférentielle (δ).** L'opérateur $\delta : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k-1}$ est d'ordre 1. On utilise la formule de Leibniz pour δ vue précédemment : $\delta(fs) = -i_{\gamma^{-1}df}s + f\delta s$. En évaluant en x (où $f = 0$) :

$$\sigma_\delta(x, \omega)\xi = -i_{\gamma^{-1}\omega}\xi$$

Le symbole est (l'opposé de) la contraction par le vecteur dual de ω :

$$\sigma_\delta(x, \omega) = -i_{\gamma^{-1}\omega}$$

8.4 Expression en coordonnées locales

Le lien entre la définition intrinsèque et l'expression locale (avec les dérivées partielles) est donné par la proposition suivante. Elle exprime que le symbole s'obtient en remplaçant formellement $\frac{\partial}{\partial x_i}$ par ω_i .

Proposition 8.4. *Supposons que L s'écrive localement :*

$$L = \sum_{|\alpha| \leq p} A_\alpha(x) D^\alpha$$

Alors le symbole est donné par le polynôme homogène caractéristique :

$$\sigma_L(x, \omega) = \sum_{|\alpha|=p} A_\alpha(x) \omega^\alpha$$

(où $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1} \dots \omega_n^{\alpha_n}$ si $\omega = \sum \omega_i dx^i$).

Démonstration. Appliquons la formule de Leibniz généralisée au produit $f^p s$:

$$D^\alpha(f^p s) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta f^p) (D^{\alpha-\beta} s)$$

On évalue cette expression en x où $f(x) = 0$.

- Si $|\beta| < p$, la dérivée $D^\beta(f^p)$ contient toujours le facteur f (ou une de ses puissances) et s'annule donc en x .
- Pour que le terme soit non nul, il faut donc $|\beta| \geq p$.
- Comme on somme sur $|\alpha| \leq p$ (ordre de l'opérateur), les seuls termes non nuls proviennent nécessairement des indices où $|\alpha| = p$ et $\beta = \alpha$.

L'expression se réduit donc aux termes d'ordre maximal :

$$L(f^p s)(x) = \sum_{|\alpha|=p} A_\alpha(x) (D^\alpha f^p)(x) s(x)$$

Calculons maintenant $(D^\alpha f^p)(x)$ pour $|\alpha| = p$. C'est la dérivée p -ième d'un produit de p fonctions identiques. Seul survit le terme où chaque dérivation "frappe" un facteur f différent, produisant un terme df . Par symétrie, il y a $p!$ telles combinaisons :

$$(D^\alpha f^p)(x) = p! \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} = p! \omega^\alpha$$

En réinjectant dans la définition du symbole (qui contient un facteur $1/p!$), on obtient :

$$\sigma_L(x, \omega) \xi = \frac{1}{p!} \sum_{|\alpha|=p} A_\alpha(x) (p! \omega^\alpha) \xi = \left(\sum_{|\alpha|=p} A_\alpha(x) \omega^\alpha \right) \xi \quad \square$$

Interprétation : La connaissance du symbole de L équivaut à la connaissance de la **partie homogène d'ordre maximum** de L , en traitant les dérivées comme des variables commutatives.

Corollaire (Algèbre des symboles) L'application "symbole principal" est un morphisme d'algèbres (modulo les termes d'ordre inférieur) :

1. **Multiplicativité (Composition) :** Si L est d'ordre p et L' d'ordre p' , alors $L \circ L'$ est d'ordre $p + p'$ et :

$$\sigma_{L \circ L'}(x, \omega) = \sigma_L(x, \omega) \circ \sigma_{L'}(x, \omega)$$

2. **Additivité :** Si L et L' sont de même ordre p et que $L + L'$ est aussi d'ordre p :

$$\sigma_{L+L'}(x, \omega) = \sigma_L(x, \omega) + \sigma_{L'}(x, \omega)$$

8.5 Calcul du symbole du Laplacien

Nous avons vu que d et δ sont d'ordre 1. Par composition, $d\delta$ et δd sont d'ordre 2. Le Laplacien $\Delta = d\delta + \delta d$ est donc d'ordre 2. D'après la propriété d'additivité des symboles (pour les termes de même ordre maximum), on a :

$$\sigma_\Delta = \sigma_{d\delta} + \sigma_{\delta d}$$

Calculons séparément chaque terme en utilisant la propriété de multiplicativité $\sigma_{A \circ B} = \sigma_A \circ \sigma_B$. Soit $x \in M$, $\omega \in T_x^* M$ et $\xi \in \Lambda^p T_x^* M$. Notons $X = \gamma^{-1} \omega$ le vecteur dual de ω .

1. **Terme $\sigma_{d\delta}$** : Rappelons que $\sigma_d = e_\omega$ (produit extérieur) et $\sigma_\delta = -i_X$ (produit intérieur).

$$\begin{aligned}\sigma_{d\delta}(x, \omega)\xi &= (\sigma_d \circ \sigma_\delta)(x, \omega)\xi \\ &= e_\omega(-i_X\xi) = -\omega \wedge (i_X\xi)\end{aligned}$$

2. **Terme $\sigma_{\delta d}$** :

$$\begin{aligned}\sigma_{\delta d}(x, \omega)\xi &= (\sigma_\delta \circ \sigma_d)(x, \omega)\xi \\ &= -i_X(\omega \wedge \xi)\end{aligned}$$

Utilisons la propriété d'antidérivation du produit intérieur : $i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge i_X\beta$. Ici $\alpha = \omega$ est de degré 1, donc :

$$i_X(\omega \wedge \xi) = (i_X\omega)\xi - \omega \wedge (i_X\xi)$$

Or, $i_X\omega = \omega(X) = \|\omega\|^2$. Donc :

$$\sigma_{\delta d}(x, \omega)\xi = -\|\omega\|^2\xi + \omega \wedge (i_X\xi)$$

Somme : En additionnant les deux expressions, les termes en $\omega \wedge i_X\xi$ se simplifient :

$$\sigma_\Delta(x, \omega)\xi = \underbrace{-\omega \wedge (i_X\xi)}_{\sigma_{d\delta}} - \underbrace{\|\omega\|^2\xi + \omega \wedge (i_X\xi)}_{\sigma_{\delta d}} = -\|\omega\|^2\xi$$

$$\sigma_\Delta(x, \omega) = -\|\omega\|^2 \text{id}$$

Le symbole du Laplacien est donc une homothétie scalaire (non nulle car $\omega \neq 0$).

8.6 Opérateurs Elliptiques et Théorème Fondamental

La propriété cruciale du Laplacien est que son symbole est inversible pour tout covecteur non nul. C'est cette propriété qui définit la classe des opérateurs elliptiques.

Définition 8.5. Un opérateur différentiel $L : \underline{F} \rightarrow \underline{F}'$ est dit elliptique si, pour tout covecteur non nul $\omega \in \dot{T}_x^*M$, le symbole :

$$\sigma_L(x, \omega) : F_x \longrightarrow F'_x$$

est une application linéaire injective.

REMARQUE. — Si F et F' sont de même rang (ce qui est le cas pour $L : \underline{F} \rightarrow \underline{F}$), l'injectivité équivaut à la bijectivité. Le symbole est alors un **isomorphisme** linéaire sur les fibres. Comme $\|\omega\|^2 \neq 0$ pour $\omega \neq 0$, le Laplacien Δ est un opérateur elliptique.

Cadre général pour le théorème de finitude.

Pour généraliser les résultats obtenus sur les formes harmoniques, plaçons-nous dans le cadre suivant :

- M est une variété riemannienne compacte orientée.
- F est un fibré vectoriel riemannien sur M (chaque fibre F_x est munie d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ variant de façon $\mathcal{C}^\infty$).

— L'espace des sections $\underline{F}$ est muni du produit scalaire global L^2 :

$$(\alpha, \beta) = \int_M \langle \alpha(x), \beta(x) \rangle_x \eta(x)$$

Définition 8.6. Un opérateur $L : \underline{F} \rightarrow \underline{F}$ est dit autoadjoint (formellement) si pour toutes sections α, β :

$$(L\alpha, \beta) = (\alpha, L\beta)$$

Le théorème de Hodge est en réalité un cas particulier du grand théorème d'analyse fonctionnelle suivant :

Théorème 8.7 (Théorème fondamental des opérateurs elliptiques). *Soit M une variété compacte orientée et $L : \underline{F} \rightarrow \underline{F}$ un opérateur différentiel qui est à la fois :*

1. **Elliptique** (Régularité)
2. **Autoadjoint** (Symétrie)

Alors :

1. Le noyau $\mathcal{H} = \ker L = \{s \in \underline{F} \mid Ls = 0\}$ est de **dimension finie**.
2. L'image de L est fermée et on a la décomposition orthogonale :

$$\underline{F} = \mathcal{H} \oplus \operatorname{Im} L$$

(C'est-à-dire que l'équation $Ls = \alpha$ a une solution ssi $\alpha \perp \ker L$).

9 Rappels de Topologie et Analyse Fonctionnelle

Pour établir les théorèmes d'existence et de régularité des solutions, nous aurons besoin de notions plus fines que celles des simples espaces vectoriels normés.

9.1 Semi-normes et Topologies localement convexes

La notion de norme est parfois trop rigide. On est souvent amené à considérer des topologies définies par une infinité de conditions de petitesse.

Définition 9.1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle semi-norme une application $p : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

1. **Sous-additivité** : $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
2. **Homogénéité** : $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$

Notez que l'on a toujours $p(0) = 0$, mais que $p(x) = 0$ n'implique pas nécessairement $x = 0$ (c'est la différence avec une norme). *Exemple* : Si ℓ est une forme linéaire sur X , $p(x) = |\ell(x)|$ est une semi-norme.

Topologie engendrée par une famille. L'intérêt réside dans la considération d'une famille de semi-normes $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in I}$. Cette famille permet de définir une topologie naturelle (dite $\mathcal{P}$ -topologie) en prenant comme base de voisinages de l'origine les intersections finies de "boules" :

$$V(0, \varepsilon, J) = \{x \in X \mid p_j(x) < \varepsilon, \quad \forall j \in J\}$$

où $\varepsilon > 0$ et $J \subset I$ est une sous-partie finie d'indices. Une suite (x_n) converge vers x pour cette topologie si et seulement si :

$$\forall i \in I, \quad p_i(x_n - x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Théorème 9.2. 1. *Séparation (Hausdorff) : La $\mathcal{P}$ -topologie est séparée si et seulement si la famille est séparante :*

$$\forall x \in X \setminus \{0\}, \quad \exists p \in \mathcal{P} \text{ tel que } p(x) \neq 0$$

2. *Métrisabilité : Si la famille $\mathcal{P}$ est dénombrable et séparante, alors la topologie est métrisable (invariante par translation).*

9.2 Topologie faible

Dans un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$, la topologie définie par la norme est appelée topologie forte. Cependant, en dimension infinie, cette topologie possède un inconvénient majeur :

Défaut de compacité : Dans un espace de dimension infinie, les bornés fermés (comme la boule unité fermée) ne sont pas compacts.

Il est donc impossible, en général, d'extraire une sous-suite convergente d'une suite bornée pour la topologie forte. C'est pourquoi on introduit une topologie avec "moins d'ouverts" (donc plus de compacts) : la topologie faible.

Définition 9.3. On dit qu'une suite (x_n) de X converge faiblement vers x si :

$$\forall \ell \in X' \text{ (dual topologique)}, \quad \ell(x_n) \longrightarrow \ell(x) \text{ dans } \mathbb{R}$$

On note souvent cette convergence $x_n \rightharpoonup x$.

La topologie faible $\sigma(X, X')$ est exactement la topologie engendrée par la famille de semi-normes $\mathcal{P} = \{p_\ell(x) = |\ell(x)|\}_{\ell \in X'}$.

Le résultat fondamental qui sauve l'analyse en dimension infinie (notamment pour les méthodes variationnelles) est le suivant :

Théorème 9.4 (Compacité faible). *Pour la topologie faible, les bornés sont "relativement compacts". Plus précisément, si X est un espace de Banach réflexif (comme un espace de Hilbert) :*

De toute suite bornée (x_n) , on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.

REMARQUE. – C'est ce théorème qui permet souvent de trouver des solutions aux équations aux dérivées partielles (comme limites faibles de suites minimisantes).

9.3 Espaces de Fréchet

Les espaces de Sobolev C^∞ ne sont pas des Banach, mais ils rentrent dans une catégorie légèrement plus large qui conserve de bonnes propriétés.

Définition 9.5. On appelle espace de Fréchet un espace vectoriel topologique localement convexe qui est :

- **Métrisable** (sa topologie est définie par une famille dénombrable séparante de semi-normes).
- **Complet** pour cette métrique.

L'exemple typique est l'espace $\mathcal{C}^\infty(K)$ muni de la convergence uniforme de toutes les dérivées sur tout compact.

Les théorèmes fondamentaux des espaces de Banach s'étendent aux espaces de Fréchet :

Théorème 9.6 (Théorème des applications ouvertes). Soient X, Y deux espaces de Fréchet et $f : X \rightarrow Y$ une application linéaire continue et surjective. Alors f est ouverte (l'image d'un ouvert est un ouvert).

Conséquence majeure :

Toute bijection linéaire continue entre deux espaces de Fréchet est un homéomorphisme (son inverse est continu).

Théorème 9.7 (Théorème du graphe fermé). Soient X, Y deux espaces de Fréchet et $f : X \rightarrow Y$ une application linéaire. Si le graphe de f , $G_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$, est fermé dans $X \times Y$, alors f est continue.

9.4 Espaces de Lebesgue L^p

L'analyse fonctionnelle moderne repose sur les espaces de fonctions dont la puissance p -ième est intégrable. Ces espaces fournissent le cadre naturel pour définir l'énergie et la convergence des solutions.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in [1, +\infty[$. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{L}^p(\Omega)$ des fonctions mesurables $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $|f|^p$ soit intégrable au sens de Lebesgue. Pour obtenir une norme (et non une semi-norme), on quotiente par la relation d'équivalence d'égalité presque partout :

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ pour presque tout } x \in \Omega$$

Définition 9.8. L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega) / \sim$$

Muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Propriétés fondamentales :

1. Inégalités :

- **Hölder** : Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (exposants conjugués), alors pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$, le produit $fg \in L^1$ et :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

- **Cauchy-Schwarz** ($p = q = 2$) : C'est le cas particulier fondamental pour les espaces de Hilbert :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

2. Complétude (Théorème de Riesz-Fischer) :

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de **Banach** (normé complet).

En particulier, $L^2(\Omega)$ est un espace de **Hilbert** muni du produit scalaire :

$$(f|g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

3. **Inclusions** (Si $|\Omega| < \infty$) : Si la mesure de Ω est finie (par exemple si Ω est borné), alors les espaces sont imbriqués décroissamment :

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \quad \text{pour } 1 \leq p < q$$

(Une fonction très intégrable est a fortiori intégrable).

4. **Dualité (Théorème de représentation de Riesz)** : Pour $1 < p < \infty$, le dual topologique de $L^p(\Omega)$ s'identifie isométriquement à $L^q(\Omega)$ (où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) via l'accouplement :

$$\ell_g(f) = \int_{\Omega} fg dx \quad (g \in L^q)$$

$$(L^p(\Omega))' \cong L^q(\Omega)$$

Conséquence : Pour $1 < p < \infty$, les espaces L^p sont **réflexifs** (le bidual est canoniquement isomorphe à l'espace de départ). C'est crucial pour extraire des sous-suites faiblement convergentes.

9.5 Espace des Distributions

La théorie des distributions généralise la notion de fonction pour permettre de dériver des objets qui ne sont pas différentiables au sens classique (comme la fonction de Heaviside ou le "pic" de Dirac).

9.5.1 Espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$

On note $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment dérivables à **support compact** inclus dans Ω .

Pour définir une topologie sur cet espace, on procède par exhaustion par des compacts. Pour tout compact $K \subset \Omega$, l'espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$ des fonctions à support dans K est muni de la topologie définie par la famille de semi-normes :

$$p_{K,m}(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \quad (m \in \mathbb{N})$$

(C'est la convergence uniforme de toutes les dérivées). $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est un espace de Fréchet.

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est la réunion de tous les $\mathcal{D}_K(\Omega)$. On le munit de la **topologie limite inductive** : une suite (φ_n) converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :

1. Il existe un compact fixe K contenant le support de tous les φ_n .
2. Pour tout multi-indice α , $D^\alpha \varphi_n$ converge uniformément vers 0 sur K .

Proposition 9.9. 1. $\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace complet (mais pas métrisable).
2. $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

9.5.2 Distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 9.10. On appelle distribution sur Ω toute forme linéaire **continue** sur $\mathcal{D}(\Omega)$. L'espace des distributions est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.

La continuité se traduit concrètement par :

$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \iff$ Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$$

L'entier m (s'il peut être choisi indépendamment de K) est appelé l'**ordre** de la distribution.

Exemples :

- **Distributions régulières :** Toute fonction locale intégrable $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ définit une distribution T_f par :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

- **Masse de Dirac :** $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ (Distribution d'ordre 0).

9.5.3 Opérations sur les distributions

L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ est stable par de nombreuses opérations, définies par dualité (en "basculant" l'opération sur la fonction test).

1. **Dérivation :** C'est l'opération reine. Toute distribution est infiniment dérivable.

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

Cette définition est motivée par la formule d'intégration par parties (les termes de bord s'annulent car φ est à support compact).

2. **Multiplication par une fonction lisse :** Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors fT est définie par :

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$$

Proposition 9.11 (Consistance). Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, sa dérivée au sens des distributions coïncide avec sa dérivée classique (définie presque partout) jusqu'à l'ordre k . Inversement, si les dérivées distributionnelles d'une fonction L^1_{loc} sont des fonctions continues, alors c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au sens classique.

9.6 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$

L'outil fondamental pour transformer les opérateurs différentiels (comme le Laplacien) en opérations algébriques (multiplications) est la transformation de Fourier.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On définit sa transformée de Fourier $\hat{f}$ par l'intégrale :

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$$

(où $\langle x, \xi \rangle$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$).

Propriétés fondamentales (Lemme de Riemann-Lebesgue) : L'application $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$ vérifie :

1. **Continuité :** $\hat{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$.
2. **Décroissance à l'infini :** $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ lorsque $|\xi| \rightarrow \infty$.
3. **Borne uniforme :**

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_{L^1}$$

9.7 Vers les distributions : L'espace de Schwartz $\mathcal{S}$

On souhaite étendre cette transformation aux distributions par dualité. Si $f \in L^1$, pour toute fonction test φ , le théorème de Fubini permet d'écrire l'identité de Parseval :

$$\int \hat{f}(y) \varphi(y) dy = \int f(x) \hat{\varphi}(x) dx$$

On serait tenté de définir $\hat{T}$ pour une distribution T par la formule $(\hat{T}, \varphi) = (T, \hat{\varphi})$.

Le problème : Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (à support compact), sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ n'est pas à support compact (sauf si $\varphi = 0$). Elle s'étend en une fonction analytique. Donc $\hat{\varphi} \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. L'espace $\mathcal{D}$ n'est pas stable par Fourier.

La solution : Introduire un espace intermédiaire, stable par Fourier, contenant $\mathcal{D}$ et dense dans les L^p : c'est l'espace de Schwartz.

Définition 9.12. On appelle espace de Schwartz ou espace des fonctions à décroissance rapide, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ telles que :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall N \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, (1 + |x|^2)^N D^\alpha f \text{ est bornée}\}$$

Autrement dit, f et toutes ses dérivées décroissent à l'infini plus vite que l'inverse de tout polynôme.

Topologie de $\mathcal{S}$ On munit $\mathcal{S}$ de la topologie définie par la famille dénombrable de semi-normes :

$$|f|_{N,\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^N D^\alpha f(x)|$$

Muni de cette topologie, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Fréchet.

Cette construction est justifiée par les théorèmes de densité suivants, qui permettent d'approcher n'importe quelle fonction ou distribution usuelle par des fonctions à décroissance rapide.

Théorème 9.13 (Inclusions et Densité). *On a la chaîne d'inclusions continues et denses :*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \xhookrightarrow{\text{dense}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \xhookrightarrow{\text{dense}} L^p(\mathbb{R}^n) \quad (\forall 1 \leq p < \infty)$$

9.8 Propriétés de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}$

L'espace de Schwartz est le cadre idéal pour l'analyse de Fourier car la transformation y est une opération stable et bijective, qui échange régularité (dérivées) et décroissance (polynômes).

1. Échange Dérivation / Multiplication (Propriété fondamentale)

C'est la raison d'être de la transformation de Fourier dans la théorie des EDP : elle transforme les opérateurs différentiels en simples multiplications par des polynômes. Pour tout $f \in \mathcal{S}$ et tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha f}(\xi) &= (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) \\ (D^\alpha \widehat{f})(\xi) &= \widehat{(-ix)^\alpha f}(\xi) \end{aligned}$$

(où $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n}$).

2. Stabilité et Isomorphisme

La transformation de Fourier est un automorphisme de l'espace de Schwartz. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus, $\mathcal{F}$ est un isomorphisme topologique bicontinu de $\mathcal{S}$ sur lui-même.

3. Théorème d'inversion de Fourier

On peut retrouver la fonction originale à partir de sa transformée. L'inverse est donné (presque) par la transformation elle-même :

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$$

Autrement dit, $\mathcal{F}^2$ est l'opérateur de symétrie centrale ($x \mapsto -x$). $\mathcal{F}^4$ est l'identité.

4. Théorème de Plancherel (Isométrie)

La transformation de Fourier conserve l'énergie (la norme L^2). C'est une isométrie de $\mathcal{S}$ muni de la norme L^2 sur lui-même.

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$$

Conséquence : Par densité de $\mathcal{S}$ dans L^2 , la transformation de Fourier s'étend de manière unique en une isométrie unitaire de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même.

5. Théorème de Convolution

La transformation de Fourier transforme le produit de convolution en produit simple (au facteur de normalisation près). Si $f, g \in \mathcal{S}$ (ou si $f \in L^1$ et $g \in L^1$), alors :

$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \widehat{f} \cdot \widehat{g}$$

(Rappelons que le produit de convolution est défini par $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$).

REMARQUE. – La formule d'inversion $\widehat{\widehat{f}}(-x) = f(x)$ reste valable pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ à la condition expresse que sa transformée $\widehat{f}$ appartienne aussi à $L^1(\mathbb{R}^n)$.

10 Distributions tempérées et leurs transformées de Fourier

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ étant défini, nous pouvons introduire son dual, qui est le "bon" espace de distributions pour l'analyse de Fourier.

Définition 10.1. On appelle espace des distributions tempérées, noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, le dual topologique de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

On munit habituellement $\mathcal{S}'$ de la **topologie faible** $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$.

Injections et Exemples L'espace $\mathcal{S}'$ est très vaste. Il contient non seulement les distributions à support compact, mais aussi toutes les fonctions à croissance polynomiale (comme les polynômes eux-mêmes, qui ne sont pas dans L^p). On a la chaîne d'inclusions continues :

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Cas particulier fondamental : L'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continuellement dans $\mathcal{S}'$ par l'identification usuelle : à toute fonction $f \in L^2$, on associe la forme linéaire continue :

$$T_f : \varphi \longmapsto (f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S})$$

10.1 Extension de la Transformation de Fourier

Puisque la transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}$, on peut la définir sur $\mathcal{S}'$ par transposition (dualité).

Définition 10.2. Pour toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'$, on définit sa transformée de Fourier $\widehat{T} \in \mathcal{S}'$ par la relation :

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Cette définition étend naturellement celle sur L^1 . On vérifie immédiatement les propriétés algébriques :

1. La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ est un isomorphisme linéaire continu (pour la topologie faible).
2. Elle échange dérivation et multiplication polynomiale :

$$\widehat{(D^\alpha T)} = (i\xi)^\alpha \widehat{T}$$

10.2 Le Théorème de Plancherel

Le résultat central est que cette extension distributionnelle coïncide avec une isométrie sur l'espace de Hilbert L^2 .

Théorème 10.3 (Théorème de Plancherel-Parseval). *La transformation de Fourier induit une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et :*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

Démonstration. La démonstration repose sur la densité de $\mathcal{S}$ dans L^2 .

1. Construction de la limite L^2 . Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Il existe une suite (f_ν) de fonctions de $\mathcal{S}$ telle que $f_\nu \rightarrow f$ dans L^2 . D'après la propriété d'isométrie sur $\mathcal{S}$ (vue précédemment), on a :

$$\|\widehat{f}_\nu - \widehat{f}_\mu\|_{L^2} = \|\widehat{f_\nu - f_\mu}\|_{L^2} = \|f_\nu - f_\mu\|_{L^2}$$

Puisque (f_ν) converge, c'est une suite de Cauchy dans L^2 . L'égalité ci-dessus montre que la suite des transformées $(\widehat{f}_\nu)$ est aussi une suite de Cauchy dans L^2 . L'espace L^2 étant complet, cette suite converge vers une limite $g \in L^2$:

$$\|\widehat{f}_\nu - g\|_{L^2} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

De plus, par continuité de la norme :

$$\|g\|_{L^2} = \lim \|\widehat{f}_\nu\|_{L^2} = \lim \|f_\nu\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

2. Identification distributionnelle. Il reste à montrer que cette limite g est bien la transformée de Fourier de f au sens des distributions ($\widehat{f}_{dist}$). Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \langle g, \varphi \rangle &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle \widehat{f}_\nu, \varphi \rangle && (\text{convergence } L^2 \implies \text{faible}) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle f_\nu, \widehat{\varphi} \rangle && (\text{définition sur } \mathcal{S}) \\ &= \langle f, \widehat{\varphi} \rangle && (\text{car } f_\nu \rightarrow f \text{ dans } L^2) \\ &= \langle \widehat{f}_{dist}, \varphi \rangle && (\text{définition sur } \mathcal{S}') \end{aligned}$$

Ainsi, $g = \widehat{f}$ au sens des distributions. On a donc bien identifié la transformée de Fourier distributionnelle à une fonction de L^2 conservant la norme. $\square$

Corollaire 10.4 (Formule d'inversion L^2). Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors la formule d'inversion est valable presque partout :

$$\widehat{\widehat{f}}(\xi) = f(-\xi)$$

Démonstration. Puisque $f \in L^2$, on a $\widehat{f} \in L^2$. En appliquant deux fois l'isométrie et en utilisant la densité de $\mathcal{S}$ (où la formule est vraie ponctuellement), l'égalité s'étend à L^2 (égalité au sens L^2 , donc presque partout). $\square$

11 Espaces de Sobolev

Pour résoudre des équations aux dérivées partielles, l'espace $L^2(\Omega)$ est insuffisant car il ne contient pas d'information sur les dérivées. On introduit donc les espaces de Sobolev, qui sont des sous-espaces de L^2 où l'on exige que les dérivées (au sens des distributions) soient encore des fonctions de carré intégrable.

11.1 Espaces $H^m(\Omega)$ avec $m \in \mathbb{N}$

Définition 11.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre m l'espace vectoriel :

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, \quad D^\alpha f \in L^2(\Omega)\}$$

où $D^\alpha f$ désigne la dérivée au sens des distributions.

Interprétation : Dire que $f \in H^m(\Omega)$ signifie deux choses :

1. f est de carré intégrable ($\int |f|^2 < \infty$).
2. Pour tout multi-indice α d'ordre $\leq m$, il existe une fonction $g_\alpha \in L^2(\Omega)$ qui joue le rôle de dérivée, c'est-à-dire qui vérifie la formule d'intégration par parties contre les fonctions tests :

$$\int_{\Omega} g_\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f D^\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

(On note alors $D^\alpha f = g_\alpha$).

Note (Lemme de Sobolev) Bien que définis par des propriétés L^2 (intégrabilité), ces espaces contiennent des informations sur la régularité usuelle. On verra plus tard que si $m > \frac{n}{2}$, alors les fonctions de $H^m(\mathbb{R}^n)$ sont continues et bornées.

Proposition 11.2 (Structure Hilbertienne). *L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :*

$$(f, g)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f \overline{D^\alpha g} dx$$

La norme associée est :

$$\|f\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

Démonstration. Puisque $L^2(\Omega)$ est complet, il suffit de montrer que $H^m(\Omega)$ est un sous-espace fermé (pour la topologie induite par ce produit scalaire).

Soit $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $H^m(\Omega)$. Par définition de la norme H^m , pour chaque multi-indice α tel que $|\alpha| \leq m$, la suite des dérivées $(D^\alpha f_\nu)_\nu$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $L^2(\Omega)$.

Il existe donc des fonctions limites $g_\alpha \in L^2(\Omega)$ telles que :

$$\|D^\alpha f_\nu - g_\alpha\|_{L^2} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

Notons $f = g_0$ la limite de la suite (f_ν) elle-même. Il reste à montrer que $f \in H^m(\Omega)$ et que $D^\alpha f = g_\alpha$. C'est ici que la continuité de la dérivation au sens des distributions intervient.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction test. D'une part, la convergence L^2 implique la convergence au sens des distributions. Comme $D^\alpha f_\nu \rightarrow g_\alpha$ dans L^2 , on a :

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle D^\alpha f_\nu, \varphi \rangle = \langle g_\alpha, \varphi \rangle$$

D'autre part, par définition de la dérivée distributionnelle :

$$\langle D^\alpha f_\nu, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f_\nu, D^\alpha \varphi \rangle$$

En passant à la limite (car $f_\nu \rightarrow f$ dans L^2) :

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \langle f_\nu, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle = \langle D^\alpha f, \varphi \rangle$$

Par unicité de la limite dans $\mathbb{C}$, on identifie :

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = \langle g_\alpha, \varphi \rangle$$

Ceci étant vrai pour tout φ , on a $D^\alpha f = g_\alpha$ au sens des distributions (et presque partout). Comme $g_\alpha \in L^2$, on conclut que $f \in H^m(\Omega)$.

Enfin, la convergence $\|f_\nu - f\|_{H^m} \rightarrow 0$ découle immédiatement de la convergence de toutes les composantes dans L^2 . L'espace est donc complet. $\square$

Dans la suite de ce texte, nous nous concentrerons principalement sur le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, où la transformation de Fourier simplifie considérablement l'étude.

11.2 Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ d'ordre quelconque

La définition par les dérivées distributionnelles se limite aux entiers positifs. Grâce à la transformation de Fourier, nous pouvons définir des espaces de régularité fractionnaire ou négative.

11.2.1 Caractérisation fréquentielle

Pour $m \in \mathbb{N}$, nous avons défini la norme H^m par la somme des normes L^2 des dérivées. Par Plancherel, cela se traduit dans l'espace des fréquences.

Proposition 11.3. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la norme $\|f\|_{H^m}$ est équivalente à la norme pondérée suivante :*

$$\|f\|_m' = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

Démonstration. Par Plancherel, $\|D^\alpha f\|_{L^2} = \|\widehat{D^\alpha f}\|_{L^2} = \|\xi^\alpha \widehat{f}\|_{L^2}$. Ainsi :

$$\|f\|_{H^m}^2 \approx \sum_{|\alpha| \leq m} \|\xi^\alpha \widehat{f}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |\xi|^{2\alpha} \right) d\xi$$

Or, le polynôme $\sum_{|\alpha| \leq m} |\xi|^{2\alpha}$ est équivalent à l'infini à $|\xi|^{2m}$, tout comme $(1 + |\xi|^2)^m$. Il existe donc des constantes C_1, C_2 telles que :

$$C_1(1 + |\xi|^2)^m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi|^{2\alpha} \leq C_2(1 + |\xi|^2)^m$$

D'où l'équivalence des normes. □

Cette observation permet de généraliser la définition à tout indice réel $s \in \mathbb{R}$ (et en particulier aux entiers relatifs).

Définition 11.4. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ par :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

Muni de la norme $\|f\|_{H^s} = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}\|_{L^2}$.

Remarque :

- Pour $s \geq 0$, on retrouve les fonctions de L^2 ayant une certaine régularité.
- Pour $s < 0$, ce sont des distributions qui peuvent être singulières (ex : $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s < -n/2$).
- L'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ s'identifie au dual topologique de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

11.2.2 Propriétés et Inclusions

Théorème 11.5. On a le schéma suivant avec inclusions continues et denses :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & L^p(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & H^m(\mathbb{R}^n) & & \end{array}$$

On connaît déjà la partie supérieure du diagramme. La densité de $\mathcal{S}$ dans H^m résulte de celle de $\mathcal{S}$ dans L^2 ($H^m \subset L^2$) tandis que celle de H^m dans $\mathcal{S}'$ provient de la densité de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$.

Théorème 11.6 (Opérations). Les espaces de Sobolev se comportent bien vis-à-vis des opérateurs différentiels :

1. **Dérivation :** Pour tout multi-indice α , l'opérateur D^α est continu de H^s dans $H^{s-|\alpha|}$.

$$D^\alpha : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$$

2. **Multiplication :** Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (à décroissance rapide), la multiplication par φ est continue de H^s dans lui-même.

Démonstration. 1. Dérivation : En Fourier, $\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$. On a $|\xi^\alpha| \leq C(1 + |\xi|^2)^{|\alpha|/2}$. Donc :

$$(1 + |\xi|^2)^{(s-|\alpha|)/2} |\widehat{D^\alpha f}| \leq C(1 + |\xi|^2)^{s/2} |\widehat{f}|$$

Ce qui prouve que $\|D^\alpha f\|_{H^{s-|\alpha|}} \leq C\|f\|_{H^s}$.

2. Multiplication : $\widehat{\varphi f} = \widehat{\varphi} * \widehat{f}$. La preuve repose sur des estimations fines de convolution (inégalité de Peetre). $\square$

11.3 Le Lemme de Sobolev

C'est le résultat fondamental qui relie la régularité "abstraite" H^s (dérivées L^2) à la régularité classique C^k (continuité). L'idée est simple : si $\widehat{f}$ décroît assez vite, alors f est régulière.

Théorème 11.7 (Lemme de Sobolev). Si $s > \frac{n}{2} + k$ (où $k \in \mathbb{N}$), alors on a l'injection continue :

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_0^k(\mathbb{R}^n)$$

(Espace des fonctions de classe C^k tendant vers 0 à l'infini). En particulier, les éléments de H^s admettent un représentant de classe C^k .

Démonstration. Il suffit de montrer le cas $k = 0$ (le cas général s'en déduit en appliquant le résultat aux dérivées $D^\alpha f \in H^{s-k}$). Supposons $s > n/2$. Pour montrer que f est continue, il suffit de montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ (car la transformée inverse d'une fonction L^1 est continue et bornée).

Écrivons $\widehat{f}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \cdot \left[(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi) \right]$. C'est un produit de deux fonctions. Appliquons Cauchy-Schwarz :

$$\|\widehat{f}\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^s} \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

- Le second facteur est exactement $\|f\|_{H^s}$, qui est fini par hypothèse.
- Le premier facteur est une intégrale de Riemann convergente si et seulement si l'exposant global $2s > n$, c'est-à-dire $s > n/2$.

Ainsi, f est la transformée de Fourier inverse d'une fonction L^1 , donc $f \in C^0 \cap L^\infty$. $\square$

Corollaire 11.8 (Régularité C^∞). L'intersection de tous les espaces de Sobolev est l'espace des fonctions lisses :

$$\bigcap_{s \geq 0} H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

12 Compacité et Continuité dans les espaces de Sobolev

12.1 Le Lemme de Rellich

Une propriété cruciale des espaces de Sobolev sur les domaines bornés est que l'injection gagne en compacité lorsqu'on perd un ordre de dérivation. C'est la clé de la théorie de Fredholm pour les équations elliptiques.

Théorème 12.1 (Lemme de Rellich). Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Notons $H_K^m(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace des distributions de $H^m(\mathbb{R}^n)$ dont le support est inclus dans K . Alors l'injection canonique :

$$H_K^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{m-1}(\mathbb{R}^n)$$

est un opérateur compact pour tout $m \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous démontrons le cas $m \geq 0$. L'espace d'arrivée H^{m-1} étant complet, il suffit de montrer que de toute suite bornée (f_ν) dans H_K^m , on peut extraire une sous-suite de Cauchy pour la norme H^{m-1} . Soit donc (f_ν) une suite telle que $\|f_\nu\|_{H^m} \leq 1$ et $\text{supp}(f_\nu) \subset K$.

Étape 1 : Régularité de la transformée de Fourier. Puisque les f_ν sont à support compact, leur transformée de Fourier s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$:

$$\widehat{f}_\nu(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K f_\nu(x) e^{-i\langle x, \zeta \rangle} dx \quad (\zeta \in \mathbb{C}^n)$$

Estimons sa croissance. Pour $\zeta \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$|\widehat{f}_\nu(\zeta)| \leq C_K \|f_\nu\|_{L^1} \leq C'_K \|f_\nu\|_{L^2} \leq C'_K \|f_\nu\|_{H^m} \leq C'_K$$

La famille $(\widehat{f}_\nu)$ est donc uniformément bornée sur tout compact de $\mathbb{C}^n$.

Étape 2 : Extraction (Théorème de Montel). D'après le théorème de Montel, de cette famille uniformément bornée de fonctions holomorphes, on peut extraire une sous-suite (notée encore f_ν) qui converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^n$, et en particulier sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ (l'axe réel).

Étape 3 : Convergence globale (Argument de découpage). Montrons que cette sous-suite est de Cauchy dans H^{m-1} .

$$\|f_\nu - f_\mu\|_{H^{m-1}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\zeta|^2)^{m-1} |\widehat{f}_\nu(\zeta) - \widehat{f}_\mu(\zeta)|^2 d\zeta$$

Soit $\varepsilon > 0$. Découpons l'intégrale en deux parties selon un rayon $R > 0$:

- **Hautes fréquences** ($|\zeta| > R$) : Puisque $m - 1 < m$, on a $(1 + |\zeta|^2)^{m-1} = \frac{(1 + |\zeta|^2)^m}{1 + |\zeta|^2}$. Pour R assez grand, $\frac{1}{1 + R^2} < \varepsilon$. Ainsi :

$$\int_{|\zeta| > R} \dots \leq \frac{1}{1 + R^2} \int (1 + |\zeta|^2)^m |\widehat{f}_\nu - \widehat{f}_\mu|^2 \leq \varepsilon \|f_\nu - f_\mu\|_{H^m}^2 \leq 4\varepsilon$$

(car la suite est bornée par 1).

- **Basses fréquences** ($|\zeta| \leq R$) : Sur la boule compacte $\overline{B}(0, R)$, la suite $\widehat{f}_\nu$ converge uniformément (Étape 2). Donc pour ν, μ assez grands :

$$\int_{|\zeta| \leq R} (1 + |\zeta|^2)^{m-1} |\widehat{f}_\nu - \widehat{f}_\mu|^2 \leq C_R \sup_{|\zeta| \leq R} |\widehat{f}_\nu - \widehat{f}_\mu|^2 \leq \varepsilon$$

Au total, $\|f_\nu - f_\mu\|_{H^{m-1}}^2 \leq 5\varepsilon$. La suite est de Cauchy. □

12.2 Multiplication par une fonction test (Estimations modérées)

La multiplication par une fonction régulière ne préserve pas la norme exactement, mais l'erreur commise est contrôlée par une norme d'ordre inférieur.

Proposition 12.2. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la multiplication par φ est un opérateur continu de H^m dans H^m . Plus précisément, il existe des constantes A et B telles que :*

$$\|\varphi f\|_{H^m} \leq A\|\varphi\|_{\infty}\|f\|_{H^m} + B\|f\|_{H^{m-1}}$$

Démonstration. **Cas 1 : $m \in \mathbb{N}$ (par la formule de Leibniz).** Utilisons l'équivalence de normes avec les dérivées usuelles.

$$D^{\alpha}(\varphi f) = \underbrace{\varphi D^{\alpha} f}_{\text{terme dominant}} + \underbrace{\sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \varphi \cdot D^{\beta} f}_{\text{termes d'ordre inférieur}}$$

En prenant la norme L^2 et en sommant sur $|\alpha| \leq m$:

- Le terme dominant se majore par $\|\varphi\|_{\infty}\|D^{\alpha} f\|_{L^2}$.
- Les termes de la somme ne contiennent que des dérivées de f d'ordre $|\beta| \leq m-1$.

Ainsi :

$$\|\varphi f\|_{H^m} \leq \|\varphi\|_{\infty}\|f\|_{H^m} + C(\varphi) \sum_{|\beta| \leq m-1} \|D^{\beta} f\|_{L^2}$$

Le dernier terme est majoré par $B\|f\|_{H^{m-1}}$.

Cas 2 : $m < 0$ (Technique du décalage). L'idée est de se ramener à un indice supérieur en utilisant un opérateur isométrique. Soit P l'opérateur (pseudo-différentiel) défini par son symbole : $\widehat{Pf}(\xi) = (1 + |\xi|^2)\widehat{f}(\xi)$. P réalise une isométrie de H^s sur H^{s-2} pour tout s .

Pour estimer $\|\varphi f\|_{H^m}$, introduisons le "conjugué" $\gamma(f)$ défini par le diagramme :

$$f \in H^m \xrightarrow{P} H^{m-2} \xrightarrow{\times \varphi} H^{m-2} \xrightarrow{P^{-1}} \gamma(f) \in H^m$$

On a, par définition de l'isométrie P :

$$\|\gamma(f)\|_{H^m} = \|P^{-1}(\varphi Pf)\|_{H^m} = \|\varphi(Pf)\|_{H^{m-2}}$$

Supposons (récurrence descendante ou validité pour indices négatifs proches de 0) que l'inégalité soit vraie pour l'indice $m-2$. Alors :

$$\|\varphi(Pf)\|_{H^{m-2}} \leq A\|\varphi\|_{\infty}\|Pf\|_{H^{m-2}} + B\|Pf\|_{H^{m-3}}$$

Comme $\|Pf\|_{H^{m-2}} = \|f\|_{H^m}$ et $\|Pf\|_{H^{m-3}} = \|f\|_{H^{m-1}}$, on obtient la bonne majoration pour $\gamma(f)$.

Il reste à contrôler l'erreur de commutation : $E = \varphi f - \gamma(f)$.

$$E = \varphi P^{-1}(Pf) - P^{-1}(\varphi Pf) = [\varphi, P^{-1}](Pf)$$

L'opérateur P^{-1} est d'ordre -2. Le commutateur $[\varphi, P^{-1}]$ est d'ordre $-2 - 1 = -3$. Appliqué à $Pf \in H^{m-2}$, le reste E est donc dans $H^{m-2+3} = H^{m+1}$, et a fortiori dans H^m . Sa norme est contrôlée par des normes inférieures de f . Finalement :

$$\|\varphi f\|_{H^m} \leq \|\gamma(f)\|_{H^m} + \|E\|_{H^m} \leq A\|\varphi\|_{\infty}\|f\|_{H^m} + B'\|f\|_{H^{m-1}}$$

□

13 Espaces de sections et distributions sur une variété paracompacte

Pour étendre l'analyse aux variétés, nous devons définir des espaces fonctionnels globaux. La méthode standard consiste à utiliser des cartes locales et une partition de l'unité pour se ramener aux définitions sur $\mathbb{R}^n$.

13.1 Construction par localisation

Soit M une variété paracompacte (dénombrable à l'infini). Soit $F \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel de rang r .

On se donne les outils de "localisation" suivants :

- Un atlas localement fini $\mathcal{U} = \{(U_i, h_i)\}_{i \in I}$, où $h_i : \Omega_i \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} U_i$.
- Des trivialisations locales du fibré : $\theta_i : \Omega_i \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(U_i)$.
- Une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ subordonnée à ce recouvrement ($\text{supp } \varphi_i \subset U_i$ et $\sum \varphi_i = 1$).

Soit $\Gamma_c(F)$ (ou $\mathcal{D}(F)$) l'espace des sections $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Toute section $s \in \Gamma_c(F)$ se décompose en une somme finie de sections à support dans une carte :

$$s = \sum_{i \in I} \varphi_i s$$

Chaque morceau $\varphi_i s$ peut être "lu" dans la carte Ω_i comme une fonction vectorielle à support compact :

$$\tilde{s}_i = \theta_i^{-1} \circ (\varphi_i s) \circ h_i : \Omega_i \longrightarrow \mathbb{R}^r$$

On note $\tilde{s}_i = (\tilde{s}_i^1, \dots, \tilde{s}_i^r)$ ses composantes.

13.2 Définition des espaces topologiques

1. Espace des sections tests $\mathcal{D}(F)$ On munit l'espace des sections à support dans un compact fixe K , noté F_K , de la topologie définie par la famille de semi-normes transférées de $\mathbb{R}^n$:

$$p_{K,m}(s) = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^r \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{u \in \Omega_i} |D^\alpha \tilde{s}_i^j(u)|$$

F_K devient ainsi un espace de Fréchet. L'espace global $\mathcal{D}(F)$ est muni de la topologie limite inductive (réunion des F_K).

2. Espace des sections distributions $\mathcal{D}'(F)$ Définissons les espaces des sections distributions :

Définition 13.1. On appelle espace des sections distributions le dual topologique $\mathcal{D}'(F)$ de $\mathcal{D}(F)$, muni de la topologie faible.

C'est l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur les sections lisses à support compact.

3. Espaces de Sobolev $H^m(F)$ On définit l'espace de Sobolev global en exigeant que les morceaux locaux soient dans $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Définition 13.2. On appelle espace de Sobolev $H^m(F)$ l'espace des sections distributions s telles que, pour tout i, j , les composantes locales $\tilde{s}_i^j$ appartiennent à $H^m(\mathbb{R}^n)$. On le munit de la norme hilbertienne :

$$\|s\|_{H^m}^2 = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^r \|\tilde{s}_i^j\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}^2$$

REMARQUE. – On montre que la topologie définie (et l'espace lui-même) est **indépendante** du choix de l'atlas et de la partition de l'unité (bien que la norme précise en dépende). $H^m(F)$ est un espace de Hilbert.

13.3 Le cas Compact et Riemannien

Dans toute la suite, on suppose que :

- M est une variété compacte et orientée.
- F est un fibré muni d'une métrique riemannienne $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$.

Cela simplifie considérablement la théorie :

1. L'espace $\mathcal{D}(F)$ coïncide avec l'espace des sections lisses $\mathcal{C}^\infty(F)$ (le support est toujours compact). C'est un espace de Fréchet.
2. On dispose d'un produit scalaire global L^2 naturel :

$$(s, \sigma)_{L^2} = \int_M \langle s(x), \sigma(x) \rangle_x \eta(x)$$

3. Ce produit scalaire permet de plonger les fonctions dans les distributions :

$$\mathcal{C}^\infty(F) \underset{\text{dense}}{\hookrightarrow} L^2(F) \underset{\text{dense}}{\hookrightarrow} \mathcal{D}'(F)$$

13.3.1 Théorèmes d'injection et de régularité

Les résultats locaux sur $\mathbb{R}^n$ se globalisent :

Théorème 13.3 (Sobolev et Régularité). 1. **Densité/Dualité** : $\mathcal{D}(F)$ est dense dans tous les $H^m(F)$. Par identification via le produit scalaire L^2 , le dual de $H^m(F)$ est $H^{-m}(F)$.
2. **Régularité** : L'intersection des espaces de Sobolev redonne les sections lisses :

$$\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} H^m(F) = \mathcal{C}^\infty(F) \quad \text{et} \quad \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} H^m(F) = \mathcal{D}'(F)$$

Théorème 13.4 (Lemme de Rellich Global). Puisque M est compacte, l'injection canonique :

$$H^m(F) \hookrightarrow H^{m-1}(F)$$

est un opérateur compact pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

13.4 Opérateurs Différentiels et Adjoint

Soit $L : \mathcal{C}^\infty(F) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(F')$ un opérateur différentiel d'ordre p .

Transposé formel Grâce aux produits scalaires sur F et F' et à l'intégration sur M , il existe un unique opérateur différentiel ${}^tL : \mathcal{C}^\infty(F') \rightarrow \mathcal{C}^\infty(F)$ tel que :

$$(Ls, \sigma)_{L^2(F')} = (s, {}^tL\sigma)_{L^2(F)} \quad \forall s \in \mathcal{C}^\infty(F), \sigma \in \mathcal{C}^\infty(F')$$

On dit que L est autoadjoint si $F = F'$ et $L = {}^tL$.

Extension aux distributions et Continuité Cette relation de dualité permet d'étendre L aux distributions. Pour $T \in \mathcal{D}'(F)$, on définit $LT \in \mathcal{D}'(F')$ par :

$$\langle LT, \sigma \rangle = \langle T, {}^tL\sigma \rangle \quad \forall \sigma \in \mathcal{C}^\infty(F')$$

Cette définition est compatible avec la dérivation forte.

Proposition 13.5 (Continuité Sobolev). *Un opérateur différentiel d'ordre p "perd" p dérivées. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, l'opérateur L s'étend en une application linéaire continue :*

$$L : H^{m+p}(F) \longrightarrow H^m(F')$$

C'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que $\|Ls\|_{H^m} \leq C\|s\|_{H^{m+p}}$.

14 Inégalités Fondamentales pour les Opérateurs Elliptiques

Le but de cette section est d'établir l'estimation a priori fondamentale (Inégalité de Gårding/-Friedrichs) qui permettra de prouver la fermeture de l'image de l'opérateur.

14.1 Estimations Locales

Commençons par deux lemmes techniques sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ (ou dans une carte locale).

Lemme 14.1 (Perturbation par des termes "petits"). *Soit L un opérateur différentiel d'ordre p dont les coefficients de la partie principale (termes d'ordre p) s'annulent à l'origine. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U_ε de 0 et une constante C_ε tels que pour toute fonction $f \in H^m$ à support dans U_ε :*

$$\|Lf\|_{H^{m-p}} \leq \varepsilon\|f\|_{H^m} + C_\varepsilon\|f\|_{H^{m-1}}$$

Démonstration. Écrivons $L = \sum_{|\alpha|=p} A_\alpha(x)D^\alpha + \text{termes d'ordre} < p$. Par hypothèse, $A_\alpha(0) = 0$. Par continuité, on peut choisir un voisinage U_ε assez petit pour que $\sup_{x \in U_\varepsilon} |A_\alpha(x)| < \varepsilon'$. Pour f à support dans U_ε :

$$\|Lf\|_{H^{m-p}} \leq \sum_{|\alpha|=p} \|A_\alpha D^\alpha f\|_{H^{m-p}} + C\|f\|_{H^{m-1}}$$

En utilisant l'estimation de multiplication (Prop. 12.2) :

$$\|A_\alpha D^\alpha f\|_{H^{m-p}} \leq C_1 \|A_\alpha\|_\infty \|D^\alpha f\|_{H^{m-p}} + C_2 \|D^\alpha f\|_{H^{m-p-1}}$$

Comme $\|D^\alpha f\|_{H^{m-p}} \leq \|f\|_{H^m}$, le premier terme est majoré par $C_1 \varepsilon' \|f\|_{H^m}$. Le second est d'ordre inférieur. En ajustant ε' , on obtient le résultat. $\square$

Lemme 14.2 (Estimation Elliptique Locale). *Soit L un opérateur différentiel elliptique d'ordre p à coefficients constants (ou variables). Il existe un voisinage de l'origine U et une constante C tels que pour toute $f \in H^m$ à support dans U :*

$$\|f\|_{H^m} \leq C (\|Lf\|_{H^{m-p}} + \|f\|_{H^{m-1}})$$

Démonstration. 1. **Cas de l'opérateur à coefficients constants figés L_0 .** Soit L_0 la partie principale de L figée en 0 : $L_0 = \sum_{|\alpha|=p} A_\alpha(0) D^\alpha$. Son symbole est $\sigma_{L_0}(\xi) = \sum_{|\alpha|=p} A_\alpha(0) (i\xi)^\alpha$. Par ellipticité, $\sigma_{L_0}(\xi)$ est inversible pour $\xi \neq 0$. Par compacité de la sphère unité et homogénéité, on a la minoration coercitive :

$$|\sigma_{L_0}(\xi) \cdot v| \geq c |\xi|^p |v| \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{C}^r)$$

Passons en Fourier. $\widehat{L_0 f}(\xi) = \sigma_{L_0}(\xi) \widehat{f}(\xi)$.

$$\|\widehat{L_0 f}(\xi)\|^2 \geq c^2 |\xi|^{2p} \|\widehat{f}(\xi)\|^2$$

On en déduit (via l'équivalence $(1 + |\xi|^2)^p \approx 1 + |\xi|^{2p}$) :

$$\|f\|_{H^m} \leq C (\|L_0 f\|_{H^{m-p}} + \|f\|_{H^{m-1}})$$

2. **Perturbation.** Pour l'opérateur général L , on écrit $L = L_0 + (L - L_0)$. L'opérateur $L - L_0$ a une partie principale qui s'annule en 0. D'après le Lemme 1, sur un voisinage assez petit :

$$\|(L - L_0)f\|_{H^{m-p}} \leq \varepsilon \|f\|_{H^m} + C_\varepsilon \|f\|_{H^{m-1}}$$

Combinons :

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^m} &\leq C \|L_0 f\| \leq C (\|Lf\| + \|(L - L_0)f\| + \|f\|_{H^{m-1}}) \\ \|f\|_{H^m} &\leq C \|Lf\|_{H^{m-p}} + C\varepsilon \|f\|_{H^m} + C' \|f\|_{H^{m-1}} \end{aligned}$$

En choisissant ε tel que $C\varepsilon < 1/2$, on peut absorber le terme $\|f\|_{H^m}$ dans le membre de gauche. $\square$

14.2 Inégalité de Friedrichs Globale

Le passage du local au global se fait par partition de l'unité, en contrôlant les erreurs de commutation.

Théorème 14.3 (Inégalité de Friedrichs). *Soit M une variété compacte et L un opérateur elliptique d'ordre p . Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, il existe une constante C telle que :*

$$\forall f \in H^m(F), \quad \|f\|_{H^m} \leq C (\|Lf\|_{H^{m-p}} + \|f\|_{H^{m-1}})$$

Démonstration. Soit (φ_i) une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement par des ouverts U_i où l'estimation locale (Lemme 2) est valide. On écrit $f = \sum_i \varphi_i f$.

$$\|f\|_{H^m} \leq \sum_i \|\varphi_i f\|_{H^m}$$

Appliquons l'estimation locale à chaque morceau $\varphi_i f$ (à support dans U_i) :

$$\|\varphi_i f\|_{H^m} \leq C_i (\|L(\varphi_i f)\|_{H^{m-p}} + \|\varphi_i f\|_{H^{m-1}})$$

Il faut faire apparaître Lf . Commutons L et φ_i :

$$L(\varphi_i f) = \varphi_i(Lf) + [L, \varphi_i]f$$

Le commutateur $[L, \varphi_i]$ est un opérateur d'ordre $p-1$ (les termes d'ordre p s'annulent). Donc :

$$\|[L, \varphi_i]f\|_{H^{m-p}} \leq C\|f\|_{H^{m-1}}$$

Ainsi :

$$\|L(\varphi_i f)\|_{H^{m-p}} \leq \|\varphi_i Lf\|_{H^{m-p}} + C\|f\|_{H^{m-1}} \leq C(\|Lf\|_{H^{m-p}} + \|f\|_{H^{m-1}})$$

En sommant sur l'indice fini i , on obtient l'inégalité cherchée. $\square$

15 Théorème de Régularité Elliptique

Le but de cette section est de montrer que si un opérateur est elliptique, il "gagne" des dérivées : la solution f est toujours plus régulière que le second membre Lf (à l'ordre de l'opérateur près).

Pour cela, nous utilisons la méthode des **quotients différentiels** (ou différences finies) introduite par Nirenberg.

15.1 Caractérisation des espaces de Sobolev par différences finies

Pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on définit le quotient différentiel :

$$f^h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|}$$

En Fourier, cela correspond à une multiplication :

$$\widehat{f^h}(\xi) = \frac{e^{i\langle h, \xi \rangle} - 1}{|h|} \widehat{f}(\xi)$$

Lemme 15.1 (Nirenberg). Soit $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Alors $f \in H^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si la famille de normes $\|f^h\|_{H^m}$ reste uniformément bornée lorsque $h \rightarrow 0$.

Démonstration. Sens direct ($\Rightarrow$) : Si $f \in H^{m+1}$, on utilise l'inégalité $|e^{iy} - 1| \leq |y|$.

$$\left| \frac{e^{i\langle h, \xi \rangle} - 1}{|h|} \right| \leq |\xi| \leq (1 + |\xi|^2)^{1/2}$$

Ainsi, $\|\widehat{f^h}\|_{H^m} \leq \|(1 + |\xi|^2)^{1/2} \widehat{f}\|_{H^m} = \|f\|_{H^{m+1}}$. La borne est uniforme.

Sens réciproque ($\Leftarrow$) : Supposons $\|f^h\|_{H^m} \leq C$ pour tout h . Prenons $h = te_j$ (vecteur de la base canonique). La famille f^{te_j} est bornée dans l'espace de Hilbert H^m . Par compacité faible (ou par convergence faible dans L^2 pondéré), on peut extraire une sous-suite $t_k \rightarrow 0$ telle que $f^{t_k e_j}$ converge faiblement vers une limite $g_j \in H^m$. Or, au sens des distributions, $f^{te_j} \rightarrow \partial_j f$. Donc $\partial_j f = g_j \in H^m$. Comme ceci est vrai pour tout j , $f \in H^{m+1}$. $\square$

15.2 Régularité locale

Lemme 15.2 (Gain de régularité local). *Soit L un opérateur différentiel elliptique d'ordre p sur un voisinage U . Il existe un sous-voisinage $U' \subset U$ tel que :*

- Si $f \in H^m(F)$ est à support dans U'
- Et si $Lf \in H^{m-p+1}(F')$

Alors $f \in H^{m+1}(F)$.

Démonstration. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que $\|f^h\|_{H^m}$ reste bornée. Appliquons l'inégalité de Friedrichs (locale) à la fonction f^h (qui est bien dans H^m et à support dans U' pour h assez petit) :

$$\|f^h\|_{H^m} \leq C \left(\|L(f^h)\|_{H^{m-p}} + \|f^h\|_{H^{m-1}} \right)$$

Examinons les termes de droite :

1. $\|f^h\|_{H^{m-1}}$: Comme $f \in H^m$, le lemme de Nirenberg (sens direct) assure que ce terme est borné par $\|f\|_{H^m}$.
2. Pour le terme avec L , utilisons la formule de commutation discrète :

$$L(f^h) = (Lf)^h - L^h(\tau_h f)$$

où $\tau_h f(x) = f(x+h)$ et L^h est l'opérateur dont les coefficients sont les quotients différentiels des coefficients de L .

- $\|(Lf)^h\|_{H^{m-p}}$ est borné car $Lf \in H^{m-p+1}$ (hypothèse).
- L^h est un opérateur d'ordre p à coefficients bornés (car L est lisse). Donc :

$$\|L^h(\tau_h f)\|_{H^{m-p}} \leq C \|\tau_h f\|_{H^m} = C \|f\|_{H^m}$$

Ce terme est donc aussi borné.

Conclusion : $\|f^h\|_{H^m}$ est borné uniformément, donc $f \in H^{m+1}$. □

15.3 Théorème de Régularité Global

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal qui permet de remonter toute la régularité.

Théorème 15.3 (Théorème de régularité). *Soit M une variété compacte et L un opérateur elliptique d'ordre p . Si f est une distribution telle que $Lf \in H^s(F')$, alors $f \in H^{s+p}(F)$.*

Démonstration. Argument de Bootstrap (Récurrence) : Puisque f est une distribution sur une variété compacte, elle appartient à un certain espace de Sobolev $H^k(F)$ pour k assez petit (propriété de structure des distributions).

Nous voulons montrer que $f \in H^{s+p}$. Supposons que $f \in H^m$ avec $m < s+p$. Si nous montrons que $f \in H^{m+1}$, nous pourrions itérer l'argument jusqu'à atteindre l'ordre désiré.

Utilisons une partition de l'unité (φ_i) subordonnée à des ouverts U_i où le lemme local s'applique.

$$f = \sum \varphi_i f$$

Regardons localement $u_i = \varphi_i f \in H^m$.

$$L(u_i) = L(\varphi_i f) = \varphi_i(Lf) + [L, \varphi_i]f$$

— $\varphi_i(Lf) \in H^s \subset H^{m-p+1}$ (car on suppose $m < s + p$, donc $s > m - p$).
 — Le commutateur $[L, \varphi_i]$ est d'ordre $p - 1$. Comme $f \in H^m$, $[L, \varphi_i]f \in H^{m-(p-1)} = H^{m-p+1}$.
 Ainsi, $L(u_i) \in H^{m-p+1}$. D'après le lemme local, on en déduit que $u_i \in H^{m+1}$. En sommant, $f \in H^{m+1}$. Par récurrence finie, on atteint $f \in H^{s+p}$. $\square$

Théorème 15.4 (Corollaire : Régularité C^∞). *Soit L un opérateur elliptique sur une variété compacte.*

$$\text{Si } Lf \in C^\infty(F'), \text{ alors } f \in C^\infty(F).$$

Démonstration. Si $Lf \in C^\infty$, alors $Lf \in H^s$ pour tout s . D'après le théorème précédent, $f \in H^{s+p}$ pour tout s . Donc $f \in \bigcap_k H^k(F) = C^\infty(F)$. $\square$

16 Théorème de Finitude

Nous abordons maintenant les propriétés globales des opérateurs elliptiques sur les variétés compactes. Le résultat principal affirme que ces opérateurs sont "presque" inversibles (ils sont de Fredholm).

Définition 16.1. Soient E_1 et E_2 deux espaces de Fréchet et $u : E_1 \rightarrow E_2$ une application linéaire continue. On dit que u est un quasi-monomorphisme (ou opérateur semi-Fredholm injectif) si :

1. $\ker u$ est de dimension finie.
2. L'image $u(E_1)$ est fermée dans E_2 .

La stabilité de cette propriété par perturbation compacte est un résultat classique d'analyse fonctionnelle.

Lemme 16.2 (Lemme des perturbations compactes). *Soient E_1 et E_2 deux espaces de Fréchet et $u, v : E_1 \rightarrow E_2$ deux applications linéaires continues. Si u est un quasi-monomorphisme et si v est un opérateur compact, alors la somme $u + v$ est un quasi-monomorphisme.*

Nous démontrerons ce lemme dans le cadre Hilbertien, suffisant pour la suite :

Cadre de la preuve : Soient E_1, E_2 deux espaces de Hilbert. On suppose que u est injectif à image fermée (donc un isomorphisme sur son image) et que v est compact. Alors $u + v$ est un quasi-monomorphisme.

Démonstration. Puisque u est un isomorphisme de E_1 sur le sous-espace fermé $F = u(E_1)$, l'inverse $u^{-1} : F \rightarrow E_1$ est continu (Théorème de l'application ouverte).

1. Finitude du noyau. Supposons par l'absurde que $\dim \ker(u + v) = \infty$. Il existe alors une suite orthonormée (x_ν) dans $\ker(u + v)$. On a :

$$(u + v)(x_\nu) = 0 \implies u(x_\nu) = -v(x_\nu)$$

Puisque la suite (x_ν) est bornée et v est compact, on peut extraire une sous-suite (toujours notée x_ν) telle que $v(x_\nu)$ converge vers une limite y_0 . Alors $u(x_\nu) \rightarrow -y_0$. Par continuité de u^{-1} sur

l'image de u :

$$x_\nu = u^{-1}(u(x_\nu)) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} -u^{-1}(y_0)$$

La suite (x_ν) convergerait donc fortement dans E_1 . Or, pour une suite orthonormée infinie, $x_\nu \rightharpoonup 0$ (faiblement) et $\|x_\nu\| = 1$, ce qui empêche toute convergence forte (car $\|x_\nu - x_\mu\|^2 = 2$ pour $\nu \neq \mu$). Contradiction. Le noyau est donc de dimension finie.

2. Fermeture de l'image. Soit $P = \ker(u + v)$ et $M = P^\perp$ son supplément orthogonal dans E_1 . Considérons la restriction $h = (u + v)|_M$. C'est une application continue et injective de M dans E_2 . L'image de $u + v$ est exactement $h(M)$. Pour montrer qu'elle est fermée, il suffit de montrer que h est "bornée inférieurement", c'est-à-dire que h^{-1} est continue sur l'image.

Supposons le contraire : il existerait une suite (x_ν) dans M telle que $\|x_\nu\| = 1$ et $h(x_\nu) \rightarrow 0$.

$$u(x_\nu) + v(x_\nu) \rightarrow 0$$

Comme (x_ν) est bornée et v compact, on extrait une sous-suite telle que $v(x_\nu) \rightarrow y_0$. Alors $u(x_\nu) \rightarrow -y_0$. Comme précédemment, u^{-1} étant continu, la suite x_ν converge vers une limite $x_0 = -u^{-1}(y_0)$. On a donc :

- $\|x_0\| = \lim \|x_\nu\| = 1$ (donc $x_0 \neq 0$).
- $x_0 \in M$ (car M est fermé).
- $(u + v)(x_0) = \lim (u + v)(x_\nu) = 0$, donc $x_0 \in \ker(u + v) = P$.

Ainsi $x_0 \in M \cap P = \{0\}$, ce qui contredit $\|x_0\| = 1$. L'opérateur h est donc un isomorphisme de M sur son image fermée $h(M)$. Ainsi, $\text{Im}(u + v) = h(M)$ est fermée. $\square$

Théorème 16.3 (Théorème de finitude). *Soit M une variété compacte orientée et $L : H^{m+p}(F) \rightarrow H^m(F')$ un opérateur différentiel elliptique d'ordre p . Alors L est un quasi-monomorphisme :*

1. $\ker L$ est de dimension finie.
2. $L(H^{m+p}(F))$ est fermé dans $H^m(F')$.

Démonstration. L'idée est d'utiliser l'inégalité de Friedrichs pour se ramener au lemme de perturbation. Considérons l'opérateur global :

$$\Phi : H^{m+p}(F) \longrightarrow H^m(F') \times H^{m+p-1}(F)$$

défini par $\Phi(f) = (Lf, f)$ (où la deuxième composante est l'injection canonique). L'espace d'arrivée est E_2 .

D'après l'inégalité de Friedrichs (Théorème p. 41), il existe $C > 0$ telle que :

$$\|f\|_{H^{m+p}} \leq C (\|Lf\|_{H^m} + \|f\|_{H^{m+p-1}}) \leq C' \|\Phi(f)\|_{E_2}$$

Cette inégalité ("coercivité") implique immédiatement que :

- Φ est injectif (si $\Phi(f) = 0$, alors $\|f\| = 0$).
- L'image de Φ est fermée dans E_2 (si $\Phi(f_n)$ converge, alors f_n est de Cauchy).

L'opérateur Φ peut s'écrire sous la forme $\Phi = U + V$ où :

$$U(f) = (Lf, 0) \quad \text{et} \quad V(f) = (0, i(f))$$

Cependant, l'application directe du lemme précédent demande une astuce car U n'est pas injectif à image fermée "tout seul". Il est plus simple de raisonner directement : L'inégalité $\|f\| \leq C(\|Lf\| + \|if\|)$ montre que sur le noyau de L , la norme H^{m+p} est contrôlée par la norme

H^{m+p-1} . Sur un espace de dimension infinie, la boule unité n'est jamais compacte (Rellich). Donc le noyau est de dimension finie.

De même pour l'image : si $Lf_n \rightarrow g$, on décompose f_n orthogonalement au noyau et on utilise l'inégalité pour montrer la convergence. $\square$

REMARQUE. – La structure logique est la suivante : Friedrichs $\implies$ semi-Fredholm grâce à la compacité de l'injection $H^s \hookrightarrow H^{s-1}$.

17 Généralisation du Théorème de Hodge

Nous disposons désormais de tous les outils analytiques nécessaires pour démontrer le théorème central de ce cours, qui généralise la décomposition des formes différentielles (vue pour le Laplacien) à tout opérateur elliptique autoadjoint sur un fibré.

Théorème 17.1 (Théorème de décomposition de Hodge). *Soit M une variété riemannienne compacte orientée, F un fibré vectoriel riemannien sur M et $L : \mathcal{D}(F) \rightarrow \mathcal{D}(F)$ un opérateur différentiel qui est à la fois :*

- Elliptique.
- Autoadjoint (formellement : $(Ls, s')_{L^2} = (s, Ls')_{L^2}$).

Alors :

1. Le noyau $\mathcal{H} = \{s \in \mathcal{D}(F) \mid Ls = 0\}$ est de dimension finie.
2. On a la décomposition en somme directe orthogonale :

$$\mathcal{D}(F) = \mathcal{H} \oplus L(\mathcal{D}(F))$$

(Toute section se décompose en une partie harmonique et une partie "exacte").

Démonstration. La stratégie consiste à travailler d'abord dans les espaces de Hilbert L^2 (où l'on a des projections orthogonales), puis à utiliser la régularité pour remonter aux sections lisses $\mathcal{D}(F)$.

Soit p l'ordre de L . Considérons l'extension de L aux espaces de Sobolev :

$$L : H^p(F) \longrightarrow H^0(F) = L^2(F)$$

Notons :

- $\mathcal{N} = \ker\{L : H^0(F) \rightarrow H^{-p}(F)\}$ (Noyau au sens distribution)
- $\mathcal{R} = \text{Im}\{L : H^p(F) \rightarrow H^0(F)\}$ (Image dans L^2)

Étape 1 : Décomposition orthogonale dans $L^2(F)$. D'après le **théorème de finitude** (Section précédente), l'opérateur $L : H^p \rightarrow H^0$ est un quasi-monomorphisme. En particulier :

- Son image $\mathcal{R}$ est fermée dans $H^0(F)$.
- Son noyau est de dimension finie.

Puisque $\mathcal{R}$ est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert, on a la décomposition :

$$H^0(F) = \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}^\perp$$

Identifions l'orthogonal de l'image. Soit $w \in H^0(F)$.

$$\begin{aligned} w \in \mathcal{R}^\perp &\iff (w, L\alpha)_{L^2} = 0 \quad \forall \alpha \in H^p(F) \\ &\iff (w, L\alpha)_{L^2} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{D}(F) \quad (\text{par densité}) \end{aligned}$$

Puisque L est autoadjoint, $(w, L\alpha) = (Lw, \alpha)$ au sens des distributions. Donc :

$$Lw = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(F)$$

Ainsi, $\mathcal{R}^\perp = \ker(L) \cap H^0(F) = \mathcal{N}$. On a donc établi la décomposition de Hodge L^2 :

$$H^0(F) = \mathcal{N} \oplus L(H^p(F))$$

Étape 2 : Régularité du noyau ($\mathcal{N} = \mathcal{H}$). Soit $w \in \mathcal{N} \subset H^0(F)$. On a $Lw = 0$. Comme $0 \in \mathcal{D}(F)$, le **théorème de régularité elliptique** (avec second membre C^∞) implique que $w \in \mathcal{D}(F)$. Donc :

$$\mathcal{N} = \{w \in \mathcal{D}(F) \mid Lw = 0\} = \mathcal{H}$$

Cela prouve le point 1 : $\mathcal{H}$ est de dimension finie (car $\mathcal{N}$ l'est par le thm de finitude).

Étape 3 : Retour aux sections lisses. Soit maintenant $\omega \in \mathcal{D}(F)$ une section lisse quelconque. Puisque $\mathcal{D}(F) \subset H^0(F)$, on peut appliquer la décomposition de l'étape 1 :

$$\omega = \alpha + \gamma \quad \text{avec } \alpha \in \mathcal{H} \text{ et } \gamma \in L(H^p(F))$$

Analysons la régularité :

- ω est C^∞ .
- α est C^∞ (car $\alpha \in \mathcal{H}$, voir étape 2).
- Donc $\gamma = \omega - \alpha$ est nécessairement C^∞ .

Il reste à montrer que γ provient d'un antécédent lisse. On sait que $\gamma = L\beta$ avec $\beta \in H^p(F)$. Puisque $L\beta = \gamma \in \mathcal{D}(F)$ (lisse) et que L est elliptique, le théorème de régularité implique que $\beta \in \mathcal{D}(F)$.

Conclusion :

$$\omega = \alpha + L\beta \quad \text{avec } \alpha \in \mathcal{H}, \beta \in \mathcal{D}(F)$$

C'est exactement la décomposition annoncée. □ □

18 Ouverture : L'IA Géométrique et le Théorème de Hodge

L'émergence du *Geometric Deep Learning* a déplacé les frontières de l'intelligence artificielle vers l'étude de données structurées sur des domaines non-euclidiens (graphes, molécules, réseaux complexes). Le théorème de Hodge y joue un rôle pivot : il permet de passer d'une boîte noire statistique à un système où l'information est décomposée et régularisée de manière topologiquement cohérente.

18.1 Intuition : L'Analogie des Flux

Pour comprendre l'impact de ce théorème sans mathématiques complexes, imaginez que les données (par exemple, des transactions financières ou du trafic Internet) se comportent comme un **fluide s'écoulant sur une surface complexe**. Le théorème de Hodge affirme que tout mouvement complexe, aussi chaotique soit-il, peut être séparé en trois comportements élémentaires distincts :

1. **Le Courant (Gradient)** : C'est l'eau qui dévale une pente. C'est la partie "logique" du flux, dirigée par une différence de potentiel (du plus haut vers le plus bas). En IA, cela représente la **hiérarchie** ou le consensus (ex : tout le monde est d'accord pour dire que le film A est meilleur que le film B).
2. **Le Tourbillon (Rotationnel)** : C'est l'eau qui tourne en rond dans une petite cavité locale sans aller nulle part. C'est la partie "incohérente" ou conflictuelle. En IA, cela représente les **boucles logiques** (Pierre bat Ciseaux, Ciseaux bat Feuille, Feuille bat Pierre) ou la fraude dans un réseau financier.
3. **Le Contournement (Harmonique)** : C'est l'eau qui s'écoule autour d'un obstacle infranchissable (comme une île au milieu de la rivière). Ce flux n'est ni une pente locale, ni un tourbillon, mais il est imposé par la **forme globale** du terrain. En IA, c'est la signature topologique de l'objet (ses "trous"), une information cruciale qui ne dépend pas des détails locaux.

18.2 Formalisme Discret : Le Complexe Simplicial Pondéré

Pour implémenter ces concepts, on remplace la variété riemannienne M par un **complexe simplicial** $K = (V, E, F, \dots)$ muni de produits scalaires internes (des poids sur les simplexes). Soit $C^k(K, \mathbb{R})$ l'espace des k -cochaînes.

L'opérateur de cobord $d_k : C^k \rightarrow C^{k+1}$ est l'adjoint de l'opérateur de bord ∂_{k+1} relativement aux produits scalaires choisis :

$$\langle d_k \omega, \sigma \rangle_{C^{k+1}} = \langle \omega, \partial_{k+1} \sigma \rangle_{C^k}$$

Le **Laplacien de Hodge combinatoire** d'ordre k est alors l'opérateur auto-adjoint défini par :

$$\Delta_k = \underbrace{d_{k-1} d_{k-1}^*}_{\text{Laplacien bas}} + \underbrace{d_k^* d_k}_{\text{Laplacien haut}}$$

En IA sur graphes, Δ_0 correspond au Laplacien de graphe normalisé (traitement des nœuds), tandis que Δ_1 permet d'analyser les flux sur les arêtes.

18.3 HodgeRank : Analyse spectrale des flux

Dans les systèmes de recommandation, les préférences sont modélisées comme des 1-cochaînes ω . Le théorème de Hodge discret garantit l'existence d'une décomposition orthogonale unique (Hodge-Helmholtz) :

$$\omega = d_0 \alpha \oplus d_1^* \beta \oplus \gamma$$

Cette équation structure l'algorithme *HodgeRank* :

- **Gradient** ($d_0 \alpha$) : Partie consistante ("potentielle") définissant un score global de Ranking.
- **Rotationnel** ($d_1^* \beta$) : Capture les incohérences cycliques locales (ex : $A > B > C > A$).
- **Harmonique** (γ) : Représente les flux persistants non-triviaux. Puisque $\gamma \in \ker(\Delta_1) \cong H_{dR}^1(M)$, cette composante encode les "trous" structurels du réseau de données.

18.4 Régularisation de Sobolev et Hypothèse de la Variété

La robustesse d'un réseau de neurones dépend de la régularité de la fonction apprise. On introduit une pénalité spectrale basée sur la norme de Sobolev $\|f\|_{H^s}$ étudiée au §8 :

$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_{task}(f) + \lambda \langle f, (I + \Delta_k)^s f \rangle$$

D'après le **Lemme de Sobolev**, cette contrainte force la décroissance rapide des coefficients de Fourier du signal. Sous l'*hypothèse de la variété* (les données discrètes échantillonnent une variété sous-jacente $\mathcal{M}$), si $s > \frac{n}{2} + k$, la fonction discrète f converge vers une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{M}$. Cela correspond à un **filtrage passe-bas géométrique**, éliminant le bruit haute fréquence.

18.5 Invariants Topologiques et Pooling

Le théorème de finitude assure que $\dim \mathcal{H}_p$ (le p -ième nombre de Betti β_p) est un entier fini. En IA, cela fonde le **Topological Pooling** :

- On calcule le spectre de Δ_k pour chaque objet (ex : molécule).
- La multiplicité de la valeur propre 0 fournit le nombre de trous β_p .
- Cette signature est un **invariant topologique** (robuste aux déformations isométriques du maillage), permettant de classifier des objets de géométries variables sur une base purement structurelle.

—

Le théorème de Hodge n'est plus seulement une preuve d'existence : c'est l'architecte de la stabilité et de l'interprétabilité des IA géométriques de nouvelle génération.

Références

- [1] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1983.
- [2] W. V. D. Hodge. *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*. Cambridge University Press, 1941.
- [3] G. de Rham. *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*. Hermann, Paris, 1955.
- [4] L.-H. Lim. Hodge Laplacians on graphs. *SIAM Review*, 62(3) :685–715, 2020.
- [5] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [6] X. Jiang, L.-H. Lim, Y. Ye, and J. Zhu. Statistical ranking and combinatorial Hodge theory. *Mathematical Programming*, 127 :203–244, 2011.
- [7] M. Yang, G. Leus, and E. Isufi. Hodge-aware convolutional learning on simplicial complexes. *NeurIPS / OpenReview*, 2023.
- [8] Convolving Directed Graph Edges via Hodge Laplacian for Brain Network Analysis. *MICCAI 2023 Proceedings*, Springer, 2023.
- [9] Topological Data Analysis and Topological Deep Learning Beyond Persistent Homology. *arXiv preprint*, 2025.